Aula 20 – Trigonometria

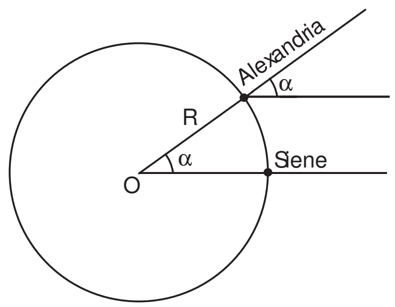
Introdução

O termo trigonometria significa, em uma tradução literal, medidas de um triângulo. Mais especificamente, a trigonometria estuda relações envolvendo ângulos e razões dos lados de triângulos semelhantes.

Historicamente as primeiras relações trigonométricas já eram conhecidas pelos egípcios e babilônicos em 1600 A.C., aproximadamente. Na antiguidade, muitos avanços na trigonometria se devem principalmente as aplicações em astronomia (ver [1], [2], [3] e [4]):

- Aristarco (310-230 A.C.), desenvolveu um consistente método para estimar o raio da lua e do sol bem como de suas distâncias relativas a terra.

- Eratóstenes (276-194 A.C.), por sua vez, calculou uma das mais famosas estimativas para o perímetro da circunferência da terra e seu raio. Para isso, comparou posições relativas de sombras exatamente ao meio dia do solstício de verão em duas cidades: Siene e Alexandria. Assim, obteve que o ângulo α da figura abaixo era cerca de $1/50$ do circulo.



  Sabendo que a distância entre as duas cidades era cerca de 925 Km, estimou que o perímetro da terra seria de cerca de $925 \times 50 = 46.250$ km, sendo que o valor correto é de 40.075 km.

- O astrônomo grego Hiparco (180-125 A.C.) é considerado o pai da trigonometria devido as suas importantes contribuições. A ele é atribuído a construção da primeira tabela trigonométrica e também uma das primeiras referências a utilizar a medida do ângulo em graus (sistema sexagesimal).

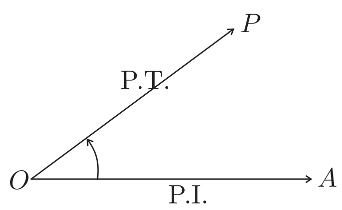
- Cláudio Ptolomeu foi o autor do mais celebre tratado de astronomia (e trigonometria) da antiguidade: O almagesto. Não há registros precisos da época em que viveu Ptolomeu, mas seus trabalhos provavelmente foram realizados no século II. O almagesto apresenta o sistema geocêntrico, ou seja terra como centro do universo. Essa teoria persistiu até a idade média, sendo posteriormente substituída pela teoria heliocêntrica de Nicolau Copérnico (1473-1543).

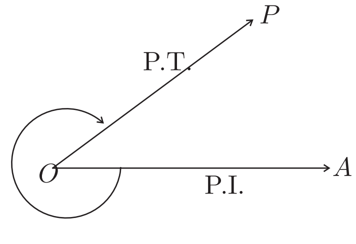
Agora que já discutimos um pouco da história da trigonometria, vamos apresentar os primeiros conceitos trigonométricos. Para isso iniciaremos discutindo o conceito básico de ângulo e o sistema sexagesimal (unidade de grau). Em seguida, apresentaremos as principais relações trigonométricas em um triângulo retângulo: seno, cosseno, tangente, etc, bem como as principais relações fundamentais entre esses elementos.

Ângulos - Medidas

Ângulo

Vamos considerar um ângulo $A\widehat{O}P$ como originário da rotação da semireta $\overrightarrow{OA}$ da posição inicial (P.I.) à posição terminal $\overrightarrow{OP}$ (P.T.)





O ângulo $A\widehat{O}P$ é positivo se o sentido da rotação indicado é anti-horário e negativo se o sentido da rotação é horário.

Medida de ângulo e arcos

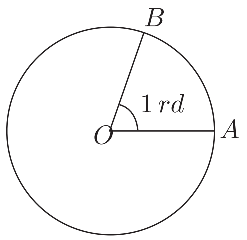
Sistema sexagesimal (unidade graus)

Definição: Ângulo de 1 grau denotado por 1° é o ângulo $\dfrac{1}{90}$ do ângulo reto.

O grau admite dois submúltiplos:
minuto denotado por $'$ e definido por $1' = \dfrac{1}{60}$ do grau;
segundo denotado por $''$ e definido por $1'' = \dfrac{1}{60}$ do minuto $= \dfrac{1}{3600}$ do segundo.

Sistema circular (unidade radiano)

Definição: Um radiano é o ângulo central que subtende na circunferência um arco cujo comprimento é igual ao raio. Notação: $1\,rd$

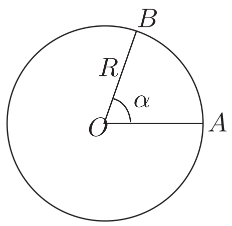


$\overset{\frown}{AB} \rightarrow$ arco AB

$\overline{\overset{\frown}{AB}} \;\rightarrow$ comprimento do arco AB

$$A\widehat{O}B = 1\,rd \quad \text{se} \quad \overline{\overset{\frown}{AB}} = R$$

Se α é um ângulo em radianos que intercepta na circunferência um arco de comprimento l, temos:



$\overset{\frown}{AB} = l$

Ângulo central		Comprimento do arco
$1\,rd$	–	R
$\alpha\,rd$	–	l

Logo, $\boxed{l = \alpha R}$.

Conversão

O ângulo de uma volta em torno de uma circunferência em graus é 360°. Vamos encontrar este ângulo em radianos.

Sabemos que o comprimento de uma circunferência é $2\pi R$.

Daí, $\alpha = \dfrac{2\pi R}{R} \Rightarrow \alpha = 2\pi$.

Portanto a relação entre os sistemas é:

$$360^\circ \leftrightarrow 2\pi.$$

Exercícios resolvidos

1. Exprimir 120° em radianos.

$$\begin{array}{ccc} 360^\circ & - & 2\pi \\ 120^\circ & - & x \end{array} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{120^\circ \cdot 2\pi}{360^\circ} = \frac{2\pi}{3}$$

Resposta: $\dfrac{2\pi}{3} rd$.

2. Exprimir $60^\circ 15'$ em radianos. (Considere $\pi = 3,14$)

$$60^\circ 15' = 60^\circ + \left(\frac{15}{60}\right)^\circ = 60,25^\circ$$

$$\begin{array}{ccc} 360^\circ & - & 2\pi \\ 60,25^\circ & - & x \end{array} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{60,25^\circ \cdot 2\pi}{360^\circ} = 1,05$$

Resposta: $1,05 rd$.

3. Exprimir $1\, rd$ em graus. (Considere $\pi = 3,14$)

Solução

$$\left.\begin{array}{ccc} 360^\circ & - & 2\pi \\ x & - & 1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180}{3,14}$$

$$\begin{array}{l|l} 1800'0 & \underline{3\,14} \\ 2300 & 57^\circ\, 19'\, 29'' \\ 102^\circ & \\ \underline{60} & \\ 6120' & \\ 2980' & \\ 154' & \\ \underline{60} & \\ 9240'' & \\ 2960 & \\ 134'' & \end{array}$$

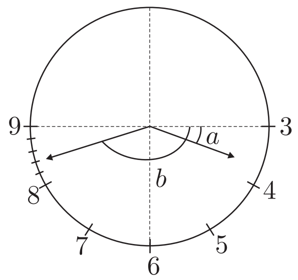
Temos que $1\, rd$ é, aproximadamente, $57^\circ\, 19'\, 29''$.

4. Calcular, em graus, o ângulo convexo formado pelos ponteiros de um relógio que marca 3h 42min.

   Solução: Note que em 1h ($60'$) o ponteiro pequeno percorre um ângulo de: $\frac{360°}{12} = 30°$.

$$\left.\begin{array}{cc} \text{Ponteiro pequeno} & \text{tempo} \\ 30° & 60' \\ a & 42' \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a = \frac{30 \cdot 42}{60} = 21°$$

   Este ângulo é o que determina o ponteiro das horas.



$$b = 30 \cdot 5 + 6 \cdot 2 = 150 + 12 = 162°$$

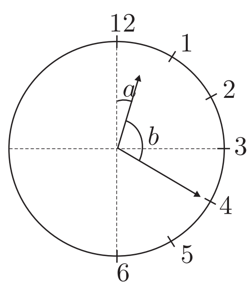
   Daí o ângulo convexo pedido é:

$$x = b - a = 162° - 21° = 141°$$

5. Calcular o menor ângulo entre os ponteiros de um relógio que marca 12h e 20min.

   Solução:

$$\left.\begin{array}{cc} \text{Ponteiro pequeno} & \text{tempo} \\ 30° & 60' \\ a & 20' \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a = \frac{20 \cdot 30}{60} = 10°$$



   Temos que $a + b = 4 \cdot 30 = 120 \Rightarrow b = 120 - 10 = 110°$.

   Resposta: $110°$.

Exercícios propostos

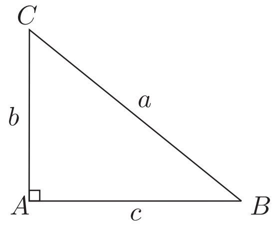
1. Exprimir $30^\circ\, 15'$ para radianos. (Considere $\pi = 3,14$)
2. Transformar 12° em radianos.
3. Achar três ângulos, em graus, sabendo que a soma do primeiro com o segundo é 12°, a do segundo com o terceiro é 9° e a soma do primeiro com o terceiro é $\dfrac{\pi}{36}\, rd$.
4. Quantos graus mede, aproximadamente, um arco de $0,105\, rd$?
5. Converter $\dfrac{2}{\pi}$ em graus. (Considere $\pi = 3,14$)
6. Mostre que o ângulo que o ponteiro das horas descreve, em graus, é a metade do número que marca os minutos.
7. Encontre o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 2h 15min.
8. Encontre o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 9h 10min.
9. O ponteiro dos minutos mede 10 cm. Determine o comprimento do arco. Determine o comprimento do arco quando a sua extremidade descreve 12 minutos.
10. A que horas, da noite, os ponteiros de um relógio coincidem entre os números 8 e 9 do mostrador?

Gabarito

1. $0,53\, rd$ 2. $0,209\, rd$
3. 4°; 8°; 1°.
4. 6°
5. $36^\circ\, 31'$
7. $22^\circ\, 30'$
8. 145°
9. 12,56 cm
10. 20h 43min 37,2 segundos.

Funções trigonométricas de um ângulo agudo

Seja um triângulo retângulo ABC de lados a, b e c



Considere as seguintes notações:

seno $\rightarrow$ sen
cosseno $\rightarrow$ cos
tangente $\rightarrow$ tg
secante $\rightarrow$ sec
cossecante $\rightarrow$ csc
cotangente $\rightarrow$ cotg

$$\text{sen}\,\widehat{B} = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \text{cotg}\,\widehat{B} = \frac{c}{b} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}}$$

$$\cos\widehat{B} = \frac{c}{a} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \sec\widehat{B} = \frac{a}{c} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}}$$

$$\text{tg}\,\widehat{B} = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \qquad \csc\widehat{B} = \frac{a}{b} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto}}$$

A partir das definições anteriores, é imediato que:

$$\text{sen}\,\widehat{C} = \frac{c}{a} = \cos\widehat{B} \qquad \text{cotg}\,\widehat{C} = \frac{b}{c} = \text{tg}\,\widehat{B}$$

$$\cos\widehat{C} = \frac{b}{a} = \text{sen}\,\widehat{B} \qquad \sec\widehat{C} = \frac{a}{b} = \csc\widehat{B}$$

$$\text{tg}\,\widehat{C} = \frac{c}{b} = \text{cotg}\,\widehat{B} \qquad \csc\widehat{C} = \frac{a}{c} = \sec\widehat{B}$$

Sendo $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$ (ângulos complementares) e as funções associadas em cada relação chamadas de co-funções. Então co-funções de ângulos complementares são iguais

Relações fundamentais

Seja x um ângulo agudo. De acordo com as definições das funções, podemos verificar que:

I) $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

II) $\text{tg}\,x = \dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x}$

III) $\text{cotg}\,x = \dfrac{1}{\text{tg}\,x} = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x}$

IV) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

V) $\csc x = \dfrac{1}{\text{sen}\,x}$

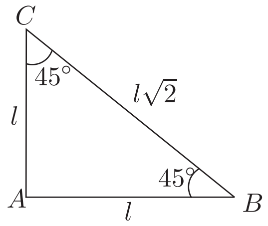
Auxiliares:

$$\begin{cases} \sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x \\ \csc^2 x = 1 + \text{cotg}^2 x \end{cases}$$

Valores notáveis

$\operatorname{sen} 45°$, $\cos 45°$, $\operatorname{tg} 45°$

Considere um triângulo retângulo isósceles de catetos l



então $l\sqrt{2}$ será a medida da hipotenusa pois $\left(\overline{BC}\right)^2 = l^2 + l^2 \Rightarrow \overline{BC} = l\sqrt{2}$.

Assim,

a) $\operatorname{sen} \widehat{B} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{l}{l\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \operatorname{sen} 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

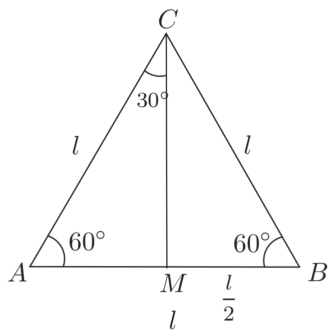
b) $\cos \widehat{B} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{l}{l\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $\operatorname{tg} \widehat{B} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{l}{l} = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} 45° = 1$.

$\operatorname{sen} 60°$, $\cos 60°$, $\operatorname{tg} 60°$

Considere um triângulo equilátero de lado l, então $\dfrac{l\sqrt{3}}{2}$ será a medida da altura pois

$$(AC)^2 = (AM)^2 + (MC)^2$$
$$\Rightarrow (MC)^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4}$$
$$\Rightarrow MC = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$



Assim:

a) $\operatorname{sen} \widehat{A} = \dfrac{MC}{BC} = \dfrac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} \Rightarrow \operatorname{sen} 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\cos \widehat{A} = \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{\frac{l}{2}}{l} \Rightarrow \cos 60° = \dfrac{1}{2}$.

c) $\operatorname{tg} \widehat{A} = \dfrac{MC}{AM} = \dfrac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} \Rightarrow \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$.

$\operatorname{sen} 30°, \ \cos 30°, \ \operatorname{tg} 30°$

No triângulo AMC do item anterior vem:

a) $\operatorname{sen} 30° = \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{\frac{l}{2}}{l} \Rightarrow \operatorname{sen} 30° = \dfrac{1}{2}.$

b) $\cos 30° = \dfrac{MC}{AC} = \dfrac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} \Rightarrow \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

c) $\operatorname{tg} 30° = \dfrac{AM}{MC} = \dfrac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{tg} 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

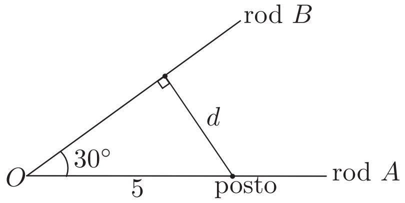
Logo temos o seguinte quadro de valores:

x	$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Exercícios resolvidos

1. Duas rodovias A e B encontram-se em O, formando um ângulo de $30°$. Na rodovia A existe um posto de gasolina que dista 5 km de O. Determine a distância do posto de gasolina à rodovia B.

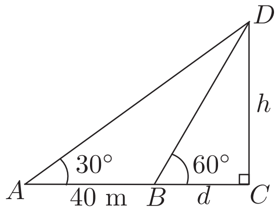
   Solução:



$$\operatorname{sen} 30° = \frac{d}{5} \Rightarrow d = 5 \cdot \frac{1}{2} = 2,5 \text{ km}$$

Resposta: $2,5$ km

2. Nas figuras, calcular h e d.



Solução:

$$\triangle BCD \qquad \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{d} \;\Rightarrow\; h = d\sqrt{3}$$

$$\triangle ACD \qquad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{40+d} \;\Rightarrow\; h = \frac{\sqrt{3}}{3}(40+d) \;\Rightarrow$$

$$d\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}(40+d) \;\Rightarrow d = 20 \text{ m e } h = 20\sqrt{3} \text{ m.}$$

Resposta: $d = 20$ m e $h = 20\sqrt{3}$ m

3. Sabendo que $\operatorname{tg} x = \dfrac{5}{12}$ (x agudo), calcular $\operatorname{sen} x$.

Solução:

Sabemos que $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$

$$1 + \frac{25}{144} = \sec^2 x \;\Rightarrow\; \sec^2 x = \frac{169}{144} \;\Rightarrow\; \sec x = \frac{13}{12}$$

$$\Rightarrow\; \cos x = \frac{12}{13}$$

Usando a F.F. $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ temos

$$\operatorname{sen}^2 x + \frac{144}{169} = 1 \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}^2 x = \frac{25}{169}$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} x = \frac{5}{13}}$$

4. Simplificar a expressão $y = \dfrac{\cos^3 a - \operatorname{sen}^3 a}{1 + \operatorname{sen} a \cos a}$

Solução:

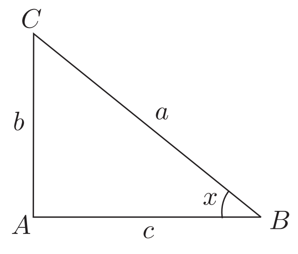
$$y = \frac{(\cos a - \operatorname{sen} a)(\cos^2 a + \cos a \operatorname{sen} a + \operatorname{sen}^2 a)}{1 + \operatorname{sen} a \cos a} \;\Rightarrow$$

$$y = \frac{(\cos a - \operatorname{sen} a)(1 + \cos a \operatorname{sen} a)}{1 + \operatorname{sen} a \cos a} = \cos a - \operatorname{sen} a$$

$$\boxed{y = \cos a - \operatorname{sen} a}$$

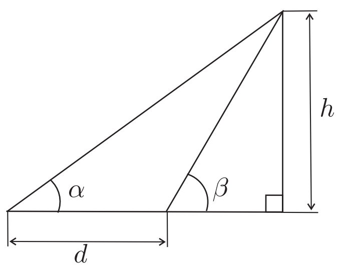
Exercícios propostos

1. Considere o triângulo retângulo ABC com as dimensões $a = 7,5$ m, $b = 4,5$ m e $c = 6$ m. Calcular o valor de $\operatorname{tg} x$.

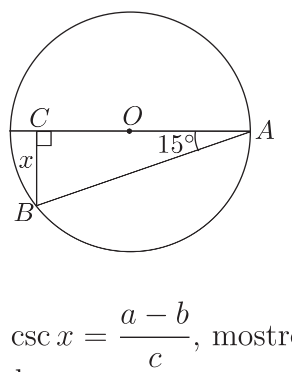


2. Uma pessoa de $1,70$ m de altura observa o topo de uma árvore sob um ângulo α. Conhecendo a distância a do observador até árvore, determine a altura da árvore.

3. Na figura, determine h, sendo dados α, β e d.



4. Sendo O o centro da circunferência de raio unitário, determine o valor de x.



5. Sendo $\operatorname{sen} x = \dfrac{a+b}{c}$ e $\csc x = \dfrac{a-b}{c}$, mostre que o triângulo ABC, de lados a, b e c é retângulo.

6. Seja a função f, definida por

$$f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x + \operatorname{cotg} x + \csc x - \operatorname{tg} x - \sec x,\ \forall x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

   Determine o valor de $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

7. Para que valores de m as raízes da equação $4x^2 + (2-3m)x + m^2 = 0$ são a tangente e a cotangente de um mesmo ângulo.

8. Simplificar a expressão
$$y = \frac{\text{sen}\, a - \text{sen}\, b}{\cos a - \cos b} + \frac{\cos a + \cos b}{\text{sen}\, a + \text{sen}\, b}$$

9. Duas crianças brincam em uma gangorra cuja tábua tem 3 m de comprimento. Quando a gangorra toca o chão forma com ele uma ângulo de 30°. Determine a altura que se eleva a criança que está na outra extremidade.

10. Determine o valor de
$$\text{sen}\, x + \frac{\text{sen}^3 x}{2} + \frac{\text{sen}^5 x}{4} + \dots$$

Gabarito

1. $0,75$
2. $1,70 + a\ \text{tg}\, \alpha$
3. $h = \dfrac{d\ \text{tg}\, \alpha\ \text{tg}\, \beta}{\text{tg}\, \beta - \text{tg}\, \alpha}$
4. $0,5$
6. $\dfrac{\sqrt{3} - 3}{2}$
7. -2
8. 0
9. $\dfrac{3}{2}$ 10. $\dfrac{2\ \text{sen}\, x}{1 + \cos^2 x}$

Referências

1. Boyer, C. B., História da Matemática, 3o edição, Editora Edgard Blücher Ltda, 1974.

2. Lima, E.L.. Meu professor de matematica e outras histórias, 3ª Edição, Publicação SBM, 1997.

3. Wikipedia, A enciclopedia livre, http://pt.wikipedia.org

4. Lobo da Costa,N. M. A História da Trigonometria. Educação Matemática em Revista - Revista da SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática) - Ano 10, São Paulo, p. 60 - 69, 01 mar. 2003.

Aula 21 – Funções Trigonométricas

Introdução

Na seção anterior estudamos as relações trigonométricas que envolvem os ângulos agudos de um triângulo retângulo. Nosso objetivo é estender estas relações para definir as funções trigonométricas para qualquer número real, e não apenas ângulos de 0 a 90 graus . Para isso utilizaremos o importante conceito de radiano apresentado na seção anterior.

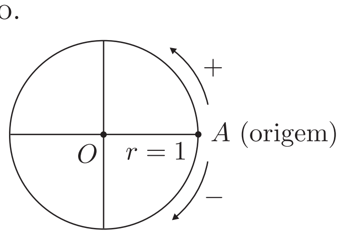
No contexto histórico, as funções trigonométricas como definiremos a seguir surgiram como evolução de diversos resultados. Entre eles podemos destacar os trabalhos de François Viéte (1540-1603) e principalmente de Leonhard Euler (1707-1783) em um dos seus mais importantes tratados: Introductio in analysin infinitorum(1748).

Para definirmos as funções trigonométricas, inicialmente apresentamos o ciclo trigonométrico e as determinações positivas e negativas de uma arco. A idéia central é que as funções trigonométricas serão definidas a partir de uma outra função que associa a cada número real um ponto sobre o ciclo trigonométrico. Feito isso, na seção seguinte, definiremos as funções seno, co-seno, tangente, etc.

Ciclo trigonométrico - determinações

Ciclo Trigonométrico

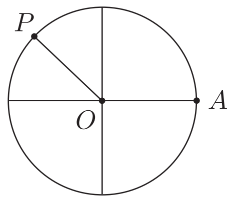
Chamamos de ciclo trigonométrico a uma circunferência de raio unitário na qual fixamos um ponto (A) como origem dos arcos e a adotamos o sentido anti-horário como positivo.



Arco Trigonométrico

Chamamos de arco trigonométrico $\overset{\frown}{AP}$ ao conjunto dos infinitos arcos de origem A e extremidade P. Esses arcos são obtidos, partindo-se da origem A e girando em qualquer sentido (positivo ou negativo) até a extremidade P, seja na primeira passagem ou após várias voltas completas no ciclo trigonométrico.

Analogamente, chamamos de ângulo trignométrico AOP ao conjunto dos infinitos ângulos de lado inicial $\overrightarrow{OA}$ e lado terminal $\overrightarrow{OP}$.

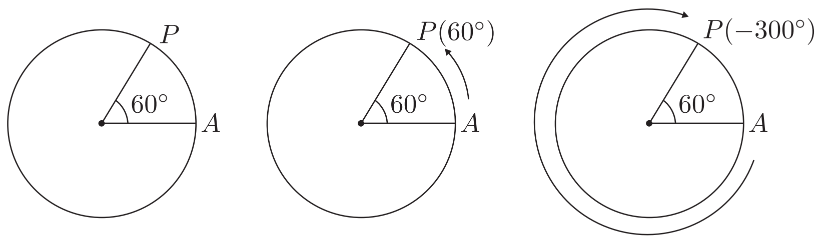


Conjunto das determinações de um arco

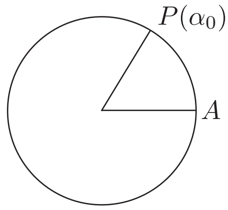
Seja P um ponto qualquer de um ciclo trigonométrico de origem A. A medida do arco $\overset{\frown}{AP}$, de origem A e extremidade P é, por convenção:

a) Positivo se o sentido do percurso de A para P for o anti-horário.

b) Negativo se o sentido de percursso de A para P for horário.

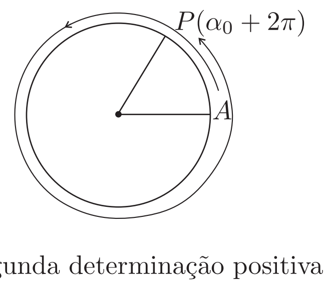


O ponto P é extremidade de infinitos arcos de origem A e a medida de cada um deles é chamada determinação. A medida α_0 do arco $\overset{\frown}{AP}$, tal que $0 \leq \alpha_0 < 2\pi$ é chamada primeira determinação positiva do arco.



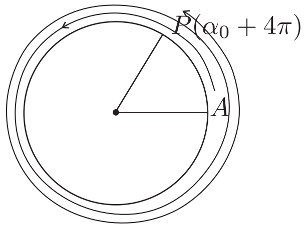
Primeira determinação positiva

Adicionando à primeira medida o número 2π, que equivale a percorrer uma volta do sentido anti-horário, obtém-se o número $\alpha_0+2\pi$ que é a segunda determinação positiva de $\overset{\frown}{AP}$.



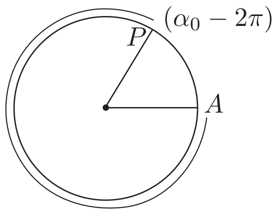
Segunda determinação positiva

Adicionando à primeira determinação o número $2{\cdot}2\pi = 4\pi$, que equivale a percorrer duas voltas no sentido anti-horário, obtém-se o número $\alpha_0 + 4\pi$ que é a terceira determinação positiva do arco $\overset{\frown}{AP}$, e assim por diante.



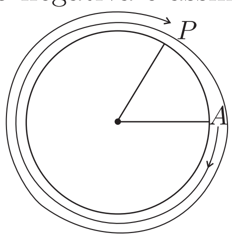
Terceira determinação positiva

Subtraindo da primeira determinação positiva o número 2π, que equivale a percorrer uma volta no sentido horário, obtém-se $\alpha_0 - 2\pi$ que é a primeira determinação negativa do arco $\overset{\frown}{AP}$.



Primeira determinação negativa

Subtraindo da primeira determinação positiva o número $2 \cdot 2\pi = 4\pi$, que equivale a percorrer duas voltas no sentido horário, obtém-se $\alpha_0 - 4\pi$ que é a segunda determinação negativa e assim por diante.



As infinitas determinações dos arcos de origem A e extremidade P são:

	Determinações positivas	Determinações negativas
primeira	α_0	$\alpha_0 - 1 \cdot 2\pi$
segunda	$\alpha_0 + 1 \cdot 2\pi$	$\alpha_0 - 2 \cdot 2\pi$
terceira	$\alpha_0 + 2 \cdot 2\pi$	$\alpha_0 - 3 \cdot 2\pi$
quarta	$\alpha_0 + 3 \cdot 2\pi$	$\alpha_0 - 4 \cdot 2\pi$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Todas essas determinações são do tipo $\alpha_o + n{\cdot}2\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$, e portanto o conjundo das determinações do arco trigonométrico $\overset{\frown}{AP}$ é:

$$\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = \alpha_o + n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

Observações

a) Se a medida dos arcos for expressa em graus, devemos escrever $\alpha = \alpha_o + n \cdot 360°, n \in \mathbb{Z}$.

b) O número α_o, utilizado no conjunto das determinações pode ser o valor de uma qualquer das determinações. É costume, porém, escolher o valor da 1^a determinação positiva ou negativa.

c) A cada ponto P estão associados infinitos números reais, mas a cada número real está associado um único P.

Se a e b são duas determinações quaisquer, do conjunto das determinações, determinar a relação entre a e b.

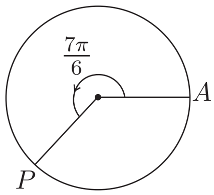
Solução:
$$\begin{array}{l} a = \alpha_0 + n_1 \cdot 2\pi \\ b = \alpha_0 + n_2 \cdot 2\pi \end{array} \Rightarrow \ a - b = 2\pi(n_1 - n_2), \ n_1 \in \mathbb{Z}, \ n_2 \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow a - b = 2\pi n \quad \text{ou} \quad a - b = 360°, \ n \in \mathbb{Z}$$

<u>Def</u>. Dois arcos a e b são côngruos quando tem a mesma origem e a mesma extremidade, isto é, diferem entre si por um número inteiro de voltas na circunferência.

Se a e b são côngruos então: $a - b = 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$ ou $a - b = 360k, \ k \in \mathbb{Z}$.

Exercícios resolvidos

1. Determinar o conjunto das determinações dos arcos de origem A e extremidade B assinalados na figura.



$$\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi, \ n \in \mathbb{Z} \right\}$$

2. Calcule a primeira determinação positiva (α_0) dos seguintes arcos:

a) $1620°$ b) $\dfrac{125\pi}{11}$ c) $-810°$ d) $-\dfrac{97\pi}{7}$

Solução

a) $1620° \ \underline{|\ 360°}$
$180° \quad 4$

$$\boxed{\alpha_0 = 180°}$$

b) $\frac{125\pi}{11} \ \underline{|\ \frac{22\pi}{11}}$
$\frac{15\pi}{11} \quad 5$

$$\boxed{\alpha_0 = \frac{15\pi}{11}}$$

c) $-810° \ \underline{|\ 360°}$
$-90° \quad -2$

$$\alpha_0 = 360° - 90° = 270°$$

$$\boxed{\alpha_0 = 270°}$$

d) $-\frac{97\pi}{7} \ \underline{|\ \frac{14\pi}{7}}$
$-\frac{13\pi}{7} \quad -6$

$$\alpha_0 = 2\pi - \frac{13\pi}{7} = \frac{\pi}{7}$$

$$\boxed{\alpha_0 = \frac{\pi}{7}}$$

3. Calcular a 3^a determinação positiva do arco $1910°$.

   $\begin{array}{l|l} 1910° & 360° \\ \cline{2-2} 110° & 5 \end{array} \Rightarrow 1^a$ det. positiva $\alpha_0 = 110°$

   Como a 3^a det. positiva é $\alpha_0 + 2 \cdot 360°$ vem $110° + 720° = 830°$.

4. Calcular a 4^a determinação negativa do arco $810°$.

   $\begin{array}{l|l} 810° & 360° \\ \cline{2-2} 90° & 2 \end{array} \Rightarrow 1^a$ det. positiva $\alpha_0 = 90°$

   A 4^a det. negativa é $\alpha_0 - 4 \cdot 360° \Rightarrow 90° - 1440° = -1350°$.

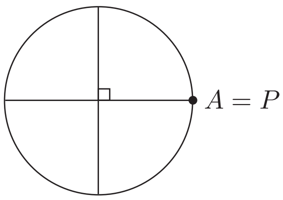
Exercícios Propostos

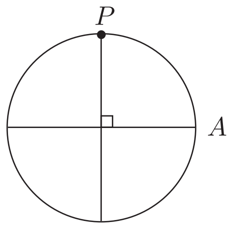
1. Calcular a 1^a determinação positiva dos arcos.

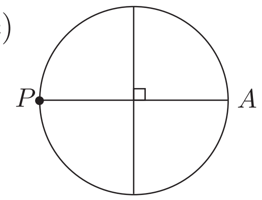
   a) $1630°$ b) $-1430°$ c) $2300°$

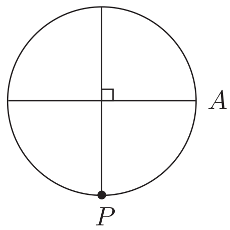
2. Determine a 1^a determinação negativa do arco $\dfrac{37\pi}{3}$.

3. Escrever o conjunto das determinações do arco $\overset{\frown}{AP}$.

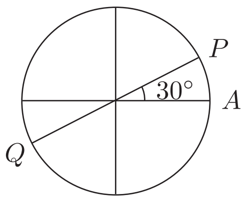
   a)
   

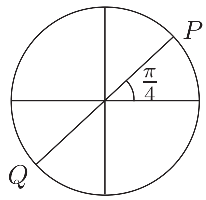
   b)
   

   c)
   

   d)
   

4. Escrever em uma única expressão, o conjunto dos arcos assinalados, com extremidade P e Q, conforme o caso:

   a)
   

   b)
   

5. Sabendo que $\pi - x$ e $2x + \pi$ são dois arcos côngruos. Determine o menor valor positivo de x.

Gabarito

1) a) $190°$ b) $10°$ c) $140°$

2) $-\dfrac{5\pi}{3}$

3) a) $2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ b) $2\pi n + \dfrac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}$

c) $2\pi n + \pi,\ n \in \mathbb{Z}$ d) $2\pi n + \dfrac{3\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}$

4) a) $V = \left\{x \in \mathbb{R} | x = k\pi + \dfrac{\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $V = \left\{x \in \mathbb{R} | x = k\pi + \dfrac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

5) $\dfrac{2\pi}{3}$

Funções Trigonométricas

Introdução

Consideremos, no ciclo trigonométrico de origem A, um sistema cartesiano ortogonal XOY conforme mostra a figura (1). Os pontos $A(1,0)$, $B(0,1)$, $A'(-1,0)$ e $B'(0,-1)$ dividem o ciclo trigonométrico em quatro quadrantes. Quando dizemos que um arco $\overset{\frown}{AP}$ pertence ao 2° quadrante, por exemplo, queremos dizer que a extremidade P pertence ao segundo quadrante.

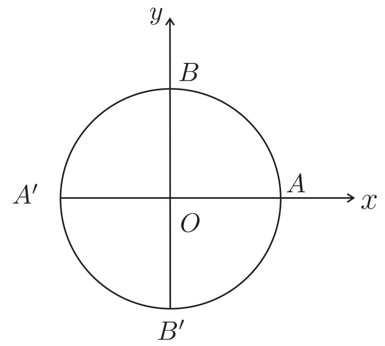
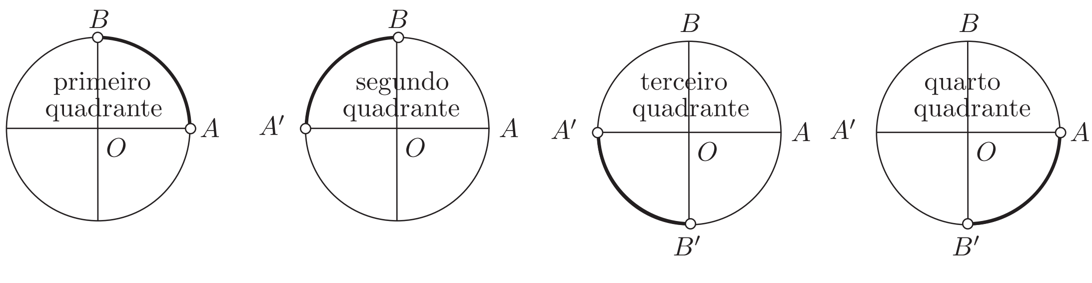
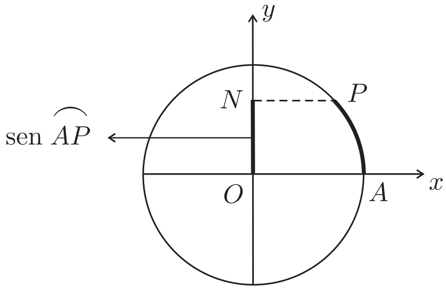


Figura 1



Definição da função seno

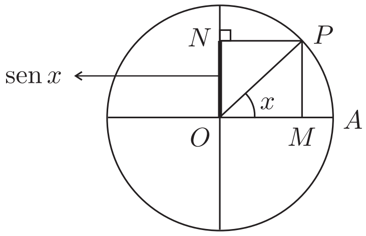
O seno de um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AP}$ de extremidade P é a ordenada do ponto P. Representa-se: sen $\overset{\frown}{AP}= ON$



A cada número real x corresponde um único ponto P, extremidade do arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida x. A cada ponto P, por sua vez, corresponde uma única ordenada chamada seno de x. A função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que a cada número real associa a ordenada do ponto P é, por definição, a função seno.

Em símbolo

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = \operatorname{sen}(x) = ON$$

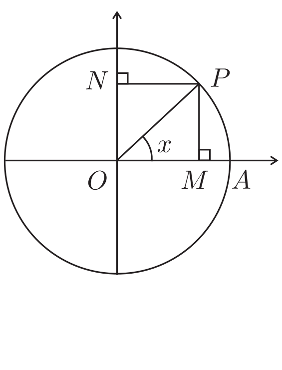


Observação

A definição acima é coerente com aquela no triângulo retângulo. De fato, se $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ então $P \in I^\circ$ quadrante e além disso $OP = 1$ (raio) e $MP = ON$.

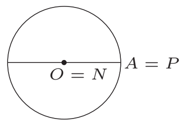
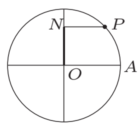
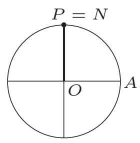
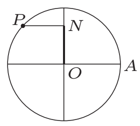
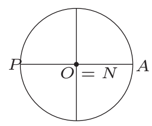
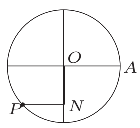
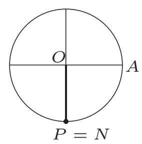
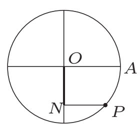
Assim no triângulo OMP retângulo em M, temos:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\text{cat. oposto}}{\text{hipotenusa}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{MP}{OP} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{MP}{1} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = ON$$



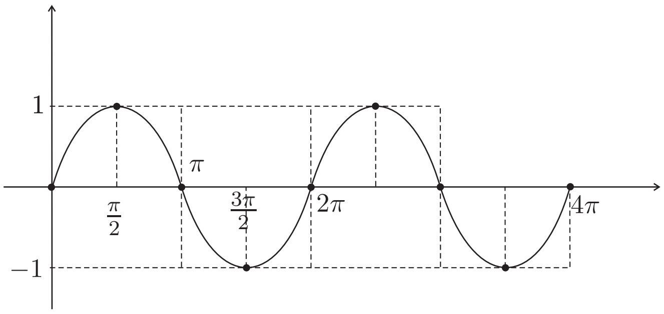
Variação da função seno

Enquanto o ponto P percorre a primeira volta, no sentido anti-horário, o número real x varia de 0 a 2π e o seno de x varia de -1 a 1. Observe, na tabela a seguir, as várias situações possíveis.

Posição do ponto P	Medida do arco em graus	Medida do arco em radianos	Seno de x	Propriedade	No ciclo trigonométrico
$P \equiv A$	$x = 0°$	$x = 0$	$\operatorname{sen} x = 0$		
$P \in 1°Q$	$0° < x < 90°$	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$0 < \operatorname{sen} x < 1$	O seno é crescente no 1° quadrante	
$P \equiv B$	$x = 90°$	$x = \frac{\pi}{2}$	$\operatorname{sen} x = 1$	Valor máximo	
$P \in 2°Q$	$90° < x < 180°$	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	$0 < \operatorname{sen} x < 1$	O seno é decrescente	
$P = A'$	$x = 180°$	$x = \pi$	$\operatorname{sen} x = 0$		
$P \in 3°Q$	$180° < x < 270°$	$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	$-1 < \operatorname{sen} x < 0$	O seno é decrescente	
$P = B'$	$x = 270°$	$x = \frac{3\pi}{2}$	$\operatorname{sen} x = -1$	Valor mínimo	
$P \in 4°Q$	$270° < x < 360°$	$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	$-1 < \operatorname{sen} x < 0$	O seno é crescente	

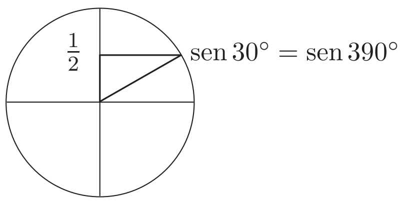
Gráfico

Note que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x \pm 2\pi)$, pois x e $x \pm 2\pi$ são as medidas de arcos de mesma extremidade e de acordo com a tabela do item anterior, concluimos que o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \operatorname{sen} x$ é:



e o conjunto imagem é $\{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$

Note que

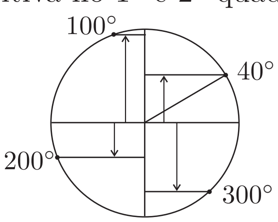


$$\operatorname{sen} 30° = \operatorname{sen}(30° + 360°) = \operatorname{sen} 390° = \frac{1}{2}$$

Propriedades

Do que foi apresentado anteriormente podemos concluir que a função seno é:

a) positiva no 1° e 2° quadrantes; negativo no 3° e 4° quadrantes

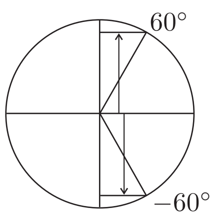


$\operatorname{sen} 40° > 0 \qquad \operatorname{sen} 200° < 0$

$\operatorname{sen} 100° > 0 \qquad \operatorname{sen} 300° < 0$

b) crescente nos 1° e 4° quadrantes e decrescente nos 2° e 3° quadrantes.

c) Ímpar pois $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$



d) Periódica de período 2π.

Exercícios Propostos

1. Calcule:

a) $\operatorname{sen} 0°$ b) $\operatorname{sen} 30°$ c) $\operatorname{sen} 45°$ d) $\operatorname{sen} 60°$

e) $\operatorname{sen} 90°$ f) $\operatorname{sen} 120°$ g) $\operatorname{sen} 150°$ h) $\operatorname{sen} 180°$

2. Calcular o valor de:

a) $\operatorname{sen} 420°$ b) $\operatorname{sen} 750°$

Gabarito

1. a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) 1 f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ g) $\frac{1}{2}$ h) 0

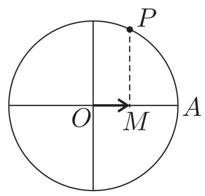
2. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$

Função Co-seno

Definição

O co-seno de um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AP}$ de extremidade P, é a abscissa do ponto P. Representa-se

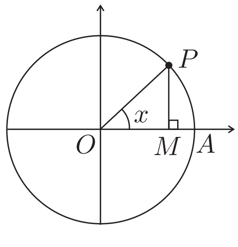
$$\cos \overset{\frown}{AP} = OM$$



A cada número real corresponde um único ponto P, extremidade do arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida x. A cada ponto P, por sua vez, corresponde uma única abscissa chamada co-seno de x. A função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que a cada número real x associa a abscissa do ponto P é, por definição, a função co-seno.

Em símbolo

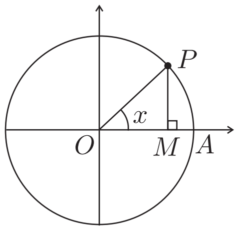
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = \cos(x) = OM$$



Obs. A definição dada é coerente com aquela apresentada no triângulo retângulo. De fato, se $0 < x < \frac{\pi}{2}$ então P pertence ao 1° quadrante e além disso $OP = 1$ (raio).

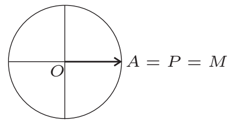
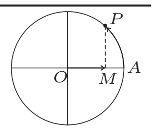
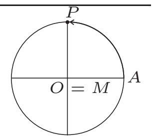
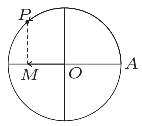
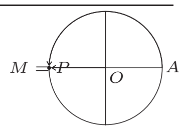
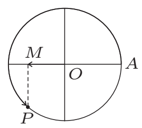
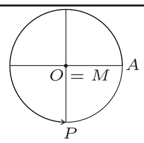
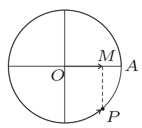
Assim, no triângulo OMP retângulo em M, temos:

$$\cos x = \frac{\text{cat. adjacente}}{\text{hipotenusa}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{OM}{OP} \Leftrightarrow \cos x = \frac{OM}{1} \Leftrightarrow \cos x = OM$$



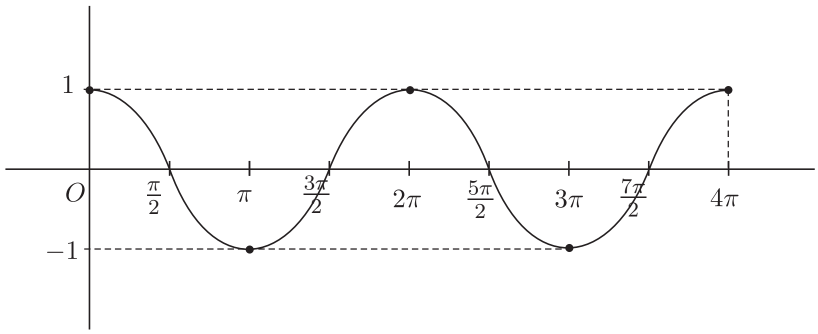
Variação da função co-seno

Enquanto o ponto P percorre a primeira volta no sentido anti-horário, o número real x varia de 0 a 2π e o co-seno de x varia de -1 a 1. Observe, na tabela a seguir as várias situações possíveis.

Posição do ponto P	Medida do arco em graus	Medida do arco em radianos	Co-seno de x	Propriedade	No ciclo trigonométrico
$P \equiv A$	$x = 0°$	$x = 0$	$\cos x = 1$	Valor máximo	
$P \in 1°Q$	$0° < x < 90°$	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$0 < \cos x < 1$	O co-seno é decrescente no 1° quadrante	
$P \equiv B$	$x = 90°$	$x = \frac{\pi}{2}$	$\cos x = 0$		
$P \in 2°Q$	$90° < x < 180°$	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	$-1 < \cos x < 0$	O co-seno é decrescente no $2°Q$	
$P = A'$	$x = 180°$	$x = \pi$	$\cos x = -1$	Valor mínimo	
$P \in 3°Q$	$180° < x < 270°$	$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	$-1 < \cos x < 0$	O co-seno é crescente no $3°Q$	
$P = B'$	$x = 270°$	$x = \frac{3\pi}{2}$	$\cos x = 0$		
$P \in 4°Q$	$270° < x < 360°$	$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	$0 < \cos x < 1$	O co-seno é crescente no $4°Q$	

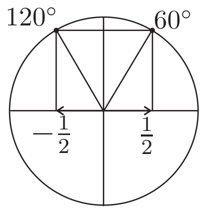
Gráfico

Note que $\cos x = \cos(x \pm 2\pi)$, pois x e $x \pm 2\pi$ são as medidas de arcos de mesma extremidade, e de acordo com a tabela anterior, concluimos que o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \cos(x)$ é:



e o conjunto imagem é $\{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$

Note que



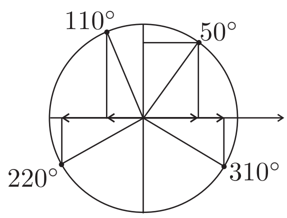
$$\cos 120° = \cos(360° + 120°) = \cos 480° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

Propriedades

Do que foi apresentado, podemos concluir que a função co-seno é:

a) Positiva no primeiro e quarto quadrantes. Negativa no segundo e terceiro quadrantes.

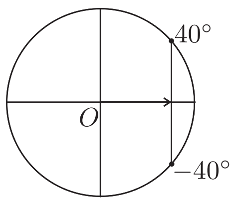
$\cos 50° > 0$	$\text{sen}\, 110° < 0$
$\cos 220° < 0$	$\text{sen}\, 310° > 0$



b) Crescente no terceiro e quarto quadrantes. Decrescente no primeiro e segundo quadrantes.

c) Par, pois $\cos(-x) = \cos x$

$$\boxed{\cos(-40°) = \cos 40°}$$



d) Periódica de período 2π

Exercícios Propostos

1. Calcule

   a) $\cos 0°$ b) $\cos 30°$ c) $\cos 45°$ d) $\cos 90°$

   e) $\cos 120°$ f) $\cos 150°$ g) $\cos 180°$

2. Calcule o valor de:

   a) $\cos 780°$ b) $\cos 1200°$

Gabarito

1. a) 1 b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) 0 e) $-\frac{1}{2}$ f) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ g) -1

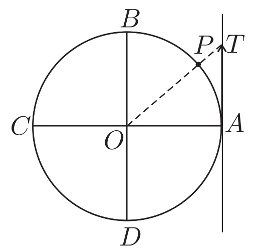
2. a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$

Função Tangente

Definição

Consideremos um arco $\overset{\frown}{AP}$ com $P \neq B$ e $P \neq D$ e seja T a interseção da reta OP com o eixo das tangentes AT.

Por definição tg $\overset{\frown}{AP} = AT$



A função tangente é tal que

$$f : \mathbb{R} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$$

$$y = \operatorname{tg} x = AT$$

Observe que o ponto P, numa volta completa no ciclo trigonométrico, faz o valor da tangente (AT) tender a $+\infty$ (ou a $-\infty$) quando o ponto P se aproxima de B ou D (onde a tangente não existe). A cada meia volta verificamos que todos os valores da tangente se repetem.

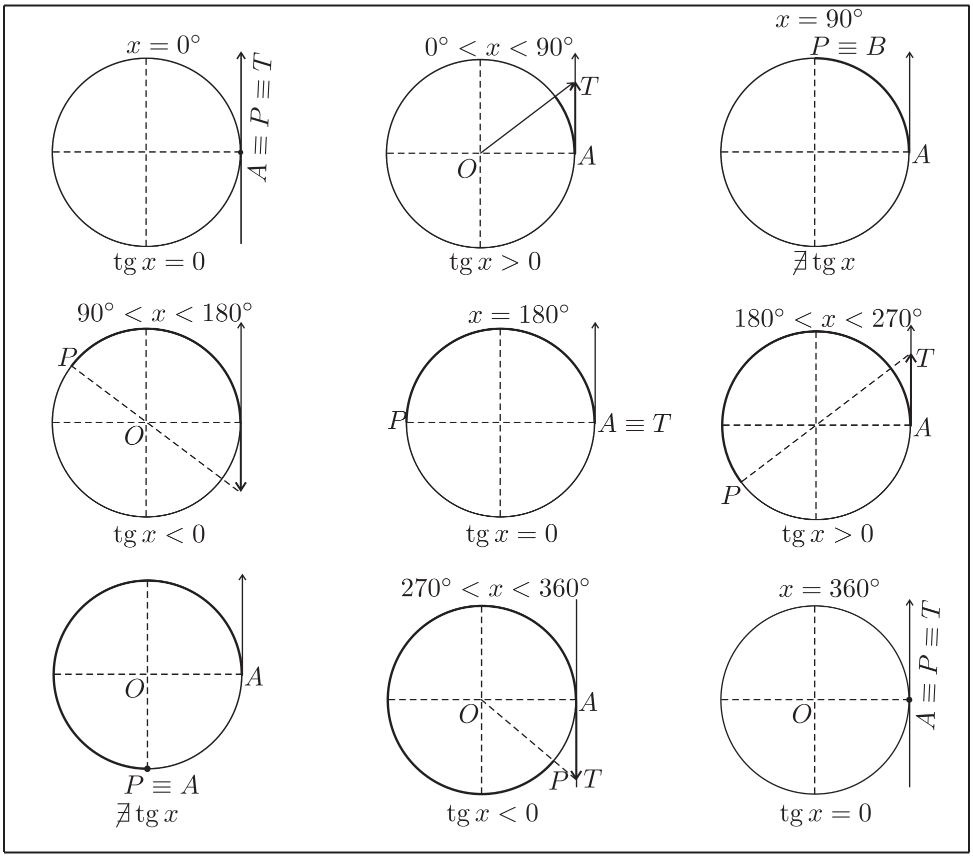
Conseqüências

Da definição da função $y = \operatorname{tg} x$ decorre que:

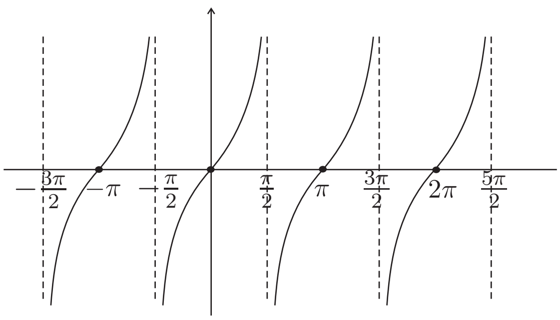
Domínio $D(f) = \mathbb{R} - \left\{k\pi + \dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Imagem $Im(f) = \mathbb{R}$

Variação da função tangente



Gráfico



Propriedades

O período da função tangente é π.

A função $y = \operatorname{tg} x$ é ímpar $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.

A função $y = \operatorname{tg} x$ é crescente no intervalo

$$k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Sinais

A tangente de um arco é positiva no 1° e 3° quadrantes e negativa no 2° e 4° quadrantes.

Exercícios resolvidos

1. Completar o quadro abaixo:

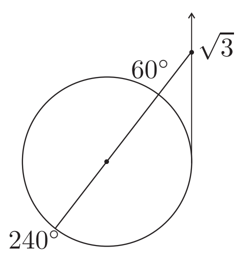
x	$\operatorname{tg} x$
$0°$	
$30°$	
$45°$	
$60°$	
$90°$	
$180°$	
$270°$	
$360°$	

Solução

x	$\operatorname{tg} x$
$0°$	0
$30°$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	1
$60°$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\nexists$
$180°$	0
$270°$	$\nexists$
$360°$	0

2. Determinar o conjunto verdade da equação $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, no intervalo $0° \leq x \leq 360°$

Solução:

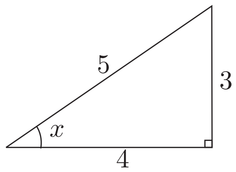


$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Rightarrow x = 60° \text{ ou } x = 240°, \quad 0° \leq x \leq 360°$$
$$V = \{60°, 240°\}$$

3. Se $\operatorname{tg} x = \dfrac{3}{4}$ e $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, determine o valor de $\cos x - \operatorname{sen} x$.

   Solução

   Seja o triângulo retângulo temos:



$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{4},\ \operatorname{sen} x = \frac{3}{5}\ \text{ e }\ \cos x = \frac{4}{5}$$

   Tomando $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, teremos: $\operatorname{tg} x = \dfrac{3}{4}$, $\operatorname{sen} x = -\dfrac{3}{5}$ e $\cos x = -\dfrac{4}{5}$.

   Portanto $\cos x - \operatorname{sen} x = \left(-\dfrac{4}{5}\right) - \left(-\dfrac{3}{5}\right) = -\dfrac{1}{5}$.

Exercícios propostos

1. Determine o conjunto verdade da equação $|\operatorname{tg} x| - 1 = 0$ no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$.

2. Determine o conjunto verdade da equação $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$, no intervalo $[4, 3\pi]$.

3. Se $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ e $\operatorname{sen} \alpha = a$. Determine $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$.

4. Na estação de trabalho de pintura de peças de uma fábrica, a pressão em um tambor de ar comprimido varia com o tempo conforme a expressão $P(t) = 50 + 50 \operatorname{sen}\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right)$, $t > 0$. Determine o instante t que corresponde ao valor mínimo da pressão.

Gabarito

1. $V = \left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right\}$

2. $V = \left\{\dfrac{7\pi}{4}, \dfrac{11\pi}{4}\right\}$

3. $\dfrac{-a}{\sqrt{1 - a^2}}$

4. 2π

Funções co-tangente, secante e co-secante

O estudo das funções co-tangente, secante e co-secante pode ser feito a partir das três funções já estudadas (seno, co-seno e tangente).

Função co-tangente

Sabemos que $\operatorname{cotg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$.

Podemos concluir que a função $y = \operatorname{cotg} x = f(x)$, tem

- $D(f) = \mathbb{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ pois a função co-tangente não existe quando a função tangente é zero
$$(\operatorname{tg} x = 0 \ \Leftrightarrow\ x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$$
- $Im(f) = \mathbb{R}$, pois a função tangente tem imagem igual a $\mathbb{R}$.
- O período da função co-tangente é π.
- A função $y = \operatorname{cotg} x$ é ímpar, $\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x$.
- Sinais

  A co-tangente de um arco é positiva no 1° e 3° quadrantes e negativa no 2° e 4° quadrantes.

Função secante

Sabemos que $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$.

Podemos concluir que a função $f(x) = y = \sec x$, tem

- $D(f) = \mathbb{R} - \left\{k\pi + \dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ pois a função secante não existe quando a função co-seno é zero
$$\left(\cos x = 0 \ \Leftrightarrow\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right)$$
- $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -1 \ \text{ou}\ y \geq 1\}$, pois a função co-seno tem imagem com valores $-1 \leq y \leq 1$.
- O período da função secante é 2π.
- A função $y = \sec x$ é par, $\sec(-x) = \sec x$.
- Sinais

  A secante de um arco é positiva no 1° e 4° quadrantes e negativa no 2° e 3° quadrantes.

Função co-secante

Sabemos que $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$.
Podemos concluir que a função $f(x) = y = \csc x$, tem:

- $D(f) = \mathbb{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ pois a função co-secante não existe quando a função seno é zero
$$(\operatorname{sen} x = 0 \ \Leftrightarrow\ x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$$
- $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \le -1 \text{ ou } y \ge 1\}$, pois a função seno tem imagem com valores $-1 \le y \le 1$.
- O período da função co-secante é 2π.
- A função $y = \csc x$ é ímpar, $\csc(-x) = -\csc x$.
- Sinais

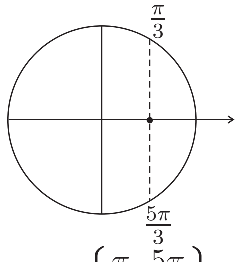
  A co-tangente de um arco é positiva no 1° e 2° quadrantes e negativa no 3° e 4° quadrantes.

Exercícios resolvidos

1. Resolver a equação $\sec x = 2,\ x \in [0, 2\pi]$.

   Solução

$$\left.\begin{array}{l} \sec x = 2 \\ \sec x = \dfrac{1}{\cos x} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{\cos x} = 2 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$



   Para $0 \le x \le 2\pi$, temos $V = \left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}$.

2. Se $x = \dfrac{\pi}{6}$, calcular o valor da expressão
$$E = \sec x + \operatorname{cotg} x + \csc(3x)$$

   Solução

$$\begin{aligned} E &= \sec\frac{\pi}{6} + \operatorname{cotg}\frac{2\pi}{6} + \csc 3 \cdot \frac{\pi}{6} = \sec\frac{\pi}{6} + \operatorname{cotg}\frac{\pi}{3} + \csc\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} = \sqrt{3} + 1 \end{aligned}$$

3. Se $\cos x = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$ e $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$. Determine o valor de $\operatorname{cotg} x$.

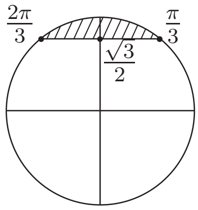
   Solução

   $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 = 1 - \dfrac{7}{9} = \dfrac{2}{9} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{3}$,

   como $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ então $\operatorname{sen} x = -\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ e, daí, $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{\frac{\sqrt{7}}{3}}{-\frac{\sqrt{2}}{3}} = -\sqrt{\dfrac{7}{2}}$.

4. Resolver a inequação $2\operatorname{sen} x - \sqrt{3} \geq 0$ para $0 \leq x \leq 2\pi$.

   Solução $\quad 2\operatorname{sen} x - \sqrt{3} \geq 0 \ \Rightarrow \ \operatorname{sen} x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



   Para $0 \leq x \leq 2\pi$, temos: $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{2\pi}{3}\right\}$.

Exercícios propostos

1. Se $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ e $\operatorname{sen} x = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$, determine o valor de $\sec x$.
2. Resolver a inequação $2\cos x + 1 < 0$, para $0 \leq x \leq 2\pi$.
3. Para que valores de x, $0 \leq x \leq 2\pi$, a função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$ existe no campo dos números reais?
4. Resolver a inequação $\operatorname{tg} x \geq 1$, para $0 \leq x \leq 2\pi$.

Gabarito

1. -5
2. $V = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \dfrac{2\pi}{3} < x < \dfrac{4\pi}{3}\right\}$
3. $0 < x < \pi$
4. $\dfrac{\pi}{4} \leq x < \dfrac{\pi}{2}$ ou $\dfrac{5\pi}{4} \leq x < \dfrac{3\pi}{2}$.

Aula 22 – Relações Fundamentais e Redução ao 1º quadrante

Relações Fundamentais

Introdução

As identidades trigonométricas estabelecem relações de igualdade entre as funções trigonométricas. Através destas identidades é possível, por exemplo, simplificar expressões. Já estudamos as relações fundamentais para triângulo retângulo. Vamos agora estudar as relações fundamentais no círculo trigonométrico.

Relações Fundamentais envolvendo seno,co-seno e tangente

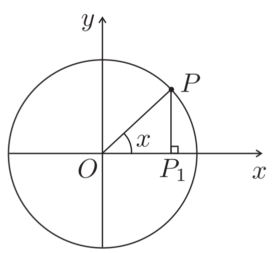
Teorema 1

Para todo $x \in \mathbb{R}$, vale a relação

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Prova

a) Se $x \neq \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$ temos o triângulo retângulo OP_1P, usando o teorema de Pitágoras vem:



$$\overline{OP_1}^2 + \overline{P_1P}^2 = \overline{OP}^2 \Rightarrow \boxed{\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1}$$

b) Se $x = \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$, podemos verificar diretamente

$$\text{Se } x = 0 \Rightarrow \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 0 + 1 = 1$$

$$\text{Se } x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 + 0 = 1$$

$$\text{Se } x = \pi \Rightarrow \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 0^2 + (-1)^2 = 1$$

$$\text{Se } x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \text{sen}^2 x + \cos^2 x = (-1)^2 + 0^2 = 1$$

Logo vale a relação $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

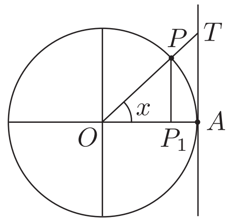
Teorema 2

Para todo $x \in \mathbb{R},\ x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$, vale a relação

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Prova

a) Se $x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ temos



$$\triangle OAT \sim \triangle OP_1P$$

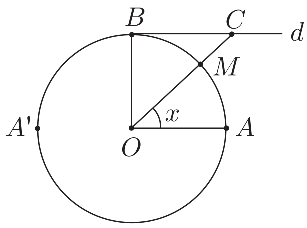
$$\frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{OP_1}} \Rightarrow \frac{\operatorname{tg} x}{1} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Vale a relação em qualquer quadrante que estiver x.

b) Se $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, temos $\operatorname{tg} x = 0 = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

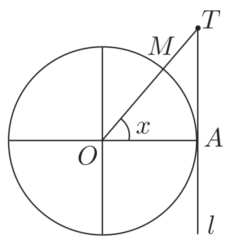
Relações Fundamentais envolvendo cotangente, secante, cossecante

1. Dado um número real $x,\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, seja M sua imagem no círculo trigonométrico. Consideremos a reta OM e seja C sua interseção com o eixo d da figura.



Denominamos cotangente de x e indicamos por $\operatorname{cotg} x$ a medida algébrica do segmento BC. Denominamos cossecante de x e indicamos por $\csc x$ a medida algébrica do segmento OC.

2. Dado um número real $x,\ x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$, seja M sua imagem no círculo trigonométrico. Consideremos a reta l que passa pelos pontos A e T da figura.

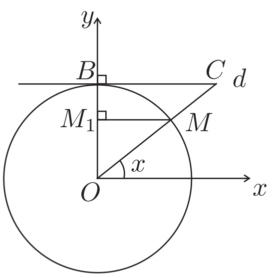


Seja T a interseção da reta l com OM. Denominamos secante de x e indicamos por $\sec x$ a medida algébrica de OT.

Teorema 3

Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, vale a relação

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$



Prova

a) Se $x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ temos

$$\triangle OBC \sim \triangle OM_1M$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{M_1M}}{\overline{OM_1}} \Rightarrow \frac{\operatorname{cotg} x}{1} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

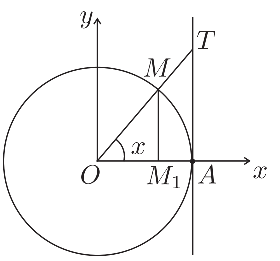
Vale a relação em qualquer quadrante que estiver x.

b) Se $x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, temos $\operatorname{cotg} x = 0 = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

Teorema 4

Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, vale a relação

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$



Prova

a) Se $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ temos

$$\triangle OM_1M \sim \triangle OAT$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{OM}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{OM_1}}{\overline{OA}} \Rightarrow \frac{1}{\sec x} = \frac{\cos x}{1} \Rightarrow \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Vale a relação em qualquer quadrante que estiver x.

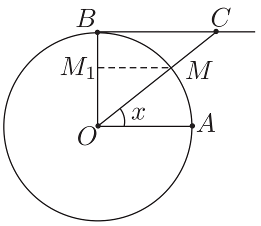
b) Se $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, temos que $\sec x = 1 = \cos x$ (k par) ou $\sec x = -1 = \cos x$ (k ímpar).

Logo, $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$.

Teorema 5

Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, vale a relação

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$



Prova

a) Se $x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$ temos

$$\triangle OM_1M \sim \triangle OBC$$

$$\Rightarrow\ \frac{\overline{OC}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OM_1}}\ \Rightarrow\ \frac{\csc x}{1} = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\ \Rightarrow\ \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Vale a relação em qualquer quadrante que estiver x.

b) Se $x = k\pi + \dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$ temos $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = 1$ (k par), $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = -1$ (k ímpar)

<u>Corolário</u> Para todo $x \in \mathbb{R},\ x \neq \dfrac{k\pi}{2}$, valem as relações:

$$\boxed{\begin{gathered} \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \\ \operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x \\ 1 + \operatorname{cotg}^2 x = \csc^2 x \\ \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \\ \operatorname{sen}^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \end{gathered}}$$

Prova

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$1 + \operatorname{cotg}^2 x = 1 + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = \csc^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \cos^2 x \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \cdot \operatorname{tg}^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

Exercícios resolvidos

1. Sabendo que $\operatorname{sen} x = \dfrac{3}{5}$ e $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$, calcular as demais funções circulares de x.

   Solução $\qquad \dfrac{\pi}{2} < x < \pi\ \Rightarrow\ \cos x < 0$

Temos

$$\cos x = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = -\frac{4}{3}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{-\frac{4}{5}} = -\frac{5}{4}$$

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$$

2. Sabendo que $\operatorname{tg} x = \dfrac{3}{4}$ e $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, calcular as demais funções circulares de x.

Solução $\quad \operatorname{cotg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} = \dfrac{1}{\frac{3}{4}} = \dfrac{4}{3}$

Já que $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow \sec x < 0$

$$\sec x = -\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x} = -\sqrt{1+\frac{9}{16}} = -\frac{5}{4}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sec x} = -\frac{4}{5}$$

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x \cdot \cos x = \frac{3}{4}\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5}$$

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = -\frac{5}{3}$$

3. Sabendo que $\csc x = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, calcular o valor da expressão $y = \operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{tg}^2 x$

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{2}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{4}{18}$$

$$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x = 1 - \frac{4}{18} = \frac{14}{18} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = \frac{\frac{4}{18}}{\frac{14}{18}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

Então

$$y = \frac{4}{18} + 2\cdot\frac{2}{7} = \frac{4}{18} + \frac{4}{7} = \frac{28+72}{126} = \frac{100}{126} = \frac{50}{53}$$

4. Calcular m de modo que $\operatorname{sen} x = 2m+1$ e $\cos x = 4m+1$.

Solução $\quad \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow (2m+1)^2 + (4m+1)^2 = 1$

$$\Rightarrow 20m^2 + 12m + 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{-12 \pm \sqrt{144-80}}{40}$$

$$\Rightarrow m = -\frac{1}{2} \text{ ou } m = -\frac{1}{10}$$

5. Dado que $\operatorname{sen} x \cdot \cos x = k$, calcular o valor de $y = \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x$ e $z = \operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x$.

   Solução

   Como $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ temos:

   $$y = (\operatorname{sen}^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = 1 - 2k^2$$

   Como $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ temos

   $$z = (\operatorname{sen}^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)(\operatorname{sen}^4 x - \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + \cos^4 x)$$

   $$z = \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x - \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = y - k^2 = 1 - 2k^2 - k^2$$

   Logo $z = 1 - 3k^2$

Exercícios propostos

1. Sabendo que $\operatorname{sen} x = -\dfrac{7}{25}$ e $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, calcular o valor da expressão $y = \dfrac{\operatorname{tg} x \cdot \cos x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}$.

2. Sendo $\cos x = \dfrac{1}{m}$ e $\operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{m+1}}{m}$, determinar m.

3. Sendo $\operatorname{tg} a = \dfrac{1}{2}$, calcular $y = \dfrac{\csc a - \operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} a - \cos a}$.

4. Se $5 \sec x - 3\operatorname{tg}^2 x = 1$, calcular $\cos x$.

5. Se $\operatorname{sen} x + \cos x = m$ e $\operatorname{sen} x \cdot cosx = n$, obter uma relação entre m e n, independente de x.

Gabarito

1. $-\dfrac{25}{7}$

2. $m = 2$ ou $m = -1$

3. $y = -4$

4. $\cos x = \dfrac{1}{2}$

5. $m^2 = 1 + 2n$

Identidades

Definição

Sejam f e g duas funções de domínios D_1 e D_2, respectivamente. Dizemos que f é idêntica a g, e indicamos $f \equiv g$, se e somente se $f(x) = g(x),\ \forall x$ em que ambas as funções estão definidas.

$$f \equiv g \ \Leftrightarrow\ f(x) = g(x),\ \forall x \in D_1 \cap D_2.$$

Existem basicamente três processos para provar a identidade de $f \equiv g$. Conforme a dificuldade da demonstração escolhemos o método mais adequado entre os seguintes.

1º) Partimos de um dos membros (geralmente o mais complicado) da identidade e o transformamos no outro.

2º) Transformamos o 1º membro (f) e, separadamente, o 2º membro (g), chegando com ambos a mesma expressão (h).

3º) Construimos a função $h = f - g$ e provamos que $h \equiv 0$.

Exercícios resolvidos

1. Provar que $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \sec x \cdot \csc x$.

   Solução: Vamos aplicar o 1º método.

   $$\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \sec x \cdot \csc x$$
   $$\Rightarrow\ \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \sec x \cdot \csc x$$

2. Provar que $(1 - \cos^2 x)(1 + \operatorname{tg}^2 x) = \operatorname{tg}^2 x$.

   Solução

   $$(1 - \cos^2 x)(1 + \operatorname{tg}^2 x) = \operatorname{sen}^2 x \cdot \sec^2 x = \operatorname{sen}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x$$

3. Provar que $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = \dfrac{2}{\sec x \cdot \csc x} + 1$

   Solução

   $$(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x\ \cos x + \cos^2 x = 1 + 2 \operatorname{sen} x\ \cos x$$
   $$\frac{2}{\sec x\ \csc x} + 1 = \frac{2}{\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x}} + 1 = 2 \operatorname{sen} x\ \cos x + 1$$

   Logo, $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = \dfrac{2}{\sec x\ \csc x} + 1$.

Exercícios propostos

1. Provar que

   a) $(1-\text{sen}^2 x)(1+\text{cotg}^2 x) = \text{cotg}^2 x$

   b) $\dfrac{(\csc^2 x - \text{cotg}^2 x)(\sec^2 x - \text{tg}^2 x)}{\cos x \cdot \text{sen}\, x} = \text{tg}\, x + \text{cotg}\, x$

   c) $\text{sen}^4 x - \cos^4 x = \text{sen}^2 x - \cos^2 x$

Redução ao 1º quadrante

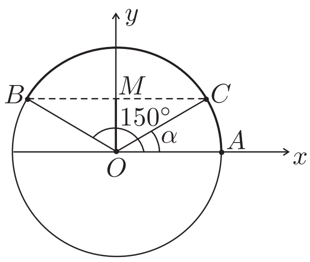
Introdução

Dado um ângulo no círculo trigonométrico é sempre possível fazê-lo corresponder a outro no intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Desse modo, funções trigonométricas são calculadas para qualquer valor, reduzindo o ângulo dado ao 1º quadrante.

Ângulo no 2º quadrante

Vamos, por exemplo, calcular $\text{sen}\, 150°$.

Inicialmente, marcamos o ângulo de $150°$ no círculo trigonométrico, determinando o arco $\overset{\frown}{AB}$.



Pela extremidade B do arco, traçamos uma paralela ao eixo x, obtendo C. O ângulo α é o correspondente a $150°$ no 1º quadrante. Como o ângulo α é o suplementar de $150°$, então

$$\alpha = 180° - 150° \Rightarrow \alpha = 30°$$

Logo, $\text{sen}\, 30° = \text{sen}\, 150° = \overline{OM} \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{2} = \text{sen}\, 150°$.

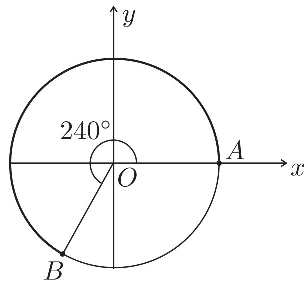
Note que se o ângulo α é o correspondente ao ângulo no 1º quadrante então

$$\text{sen}(180° - \alpha) = \text{sen}\, \alpha.$$

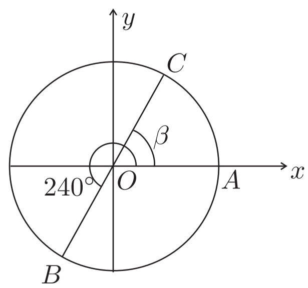
Ângulo no 3º quadrante

Vamos, agora, calcular $\cos 240°$.

Inicialmente, marcamos o ângulo $\alpha = 240°$ no círculo trigonométrico, determinando o arco $\overparen{AB}$.



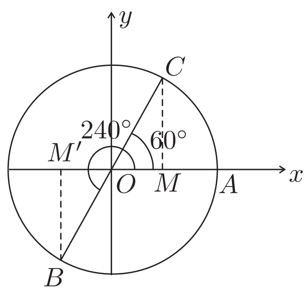
Prolongando o raio $\overline{OB}$, encontramos C e determinamos o correspondente de $240°$ no 1º quadrante.



Como o ângulo β é o explementar de $240°$, então $\beta = 240° - 180° = 60°$.

Considere a figura

Temos que $\triangle OMC \equiv \triangle OM'B$ pois



$$\begin{cases} \overline{OB} = \overline{OC} \\ \text{ângulo de } 90° \text{ nos dois triângulos (caso especial)} \\ M'\widehat{O}B = M\widehat{O}C. \end{cases}$$

Daí $\cos 240° = -\cos 60° = -\dfrac{1}{2}$.

Note que qualquer ângulo no 3º quadrante temos que

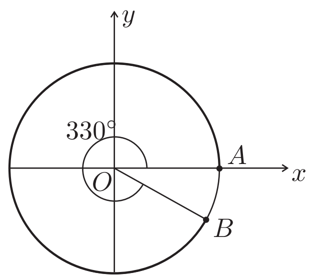
$$\cos(180° + \beta) = -\cos\beta$$

onde β é o correspondente do ângulo dado no 1º quadrante.

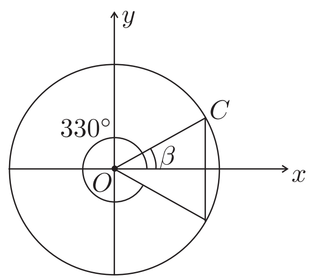
Ângulo no 4º quadrante

Vamos calcular $\operatorname{tg} 330°$.

Inicialmente, marcamos o ângulo $\alpha = 330°$ no círculo trigonométrico, determinando o arco $\overset{\frown}{AB}$.

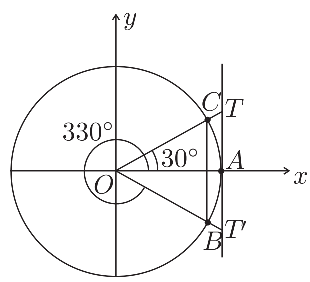


Pela extremidade B do arco, traçamos uma paralela ao eixo y, obtendo C. O ângulo β é o correspondente de 330° na igualdade.



Como β é o replementar de 330° então $\beta = 360° - 330° = 30°$.

Considere a figura



Temos que $\triangle OAT \equiv \triangle OAT'$ pois

$$\begin{cases} \text{ângulo de } 90° \text{ nos dois triângulos} \quad \text{(ALA)} \\ T\widehat{O}A = A\widehat{O}T' \\ OA \ \text{comum} \end{cases}$$

Então $|\overline{AT}| = |\overline{AT'}|$.

Logo, $\operatorname{tg} 330° = -\operatorname{tg} 30° = -\dfrac{1}{2}$.

Note que para qualquer ângulo no 4º quadrante temos que

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg}(360° - \alpha),$$

onde α é o correspondente do ângulo dado no 1º quadrante.

Resumindo:

Quadrante do ângulo $\widehat{x}$	Ângulo corresponde na 1ª volta	Procedimento
2º	suplementar a $\widehat{x}$	$180° - \widehat{x}$
3º	explementar a $\widehat{x}$	$\widehat{x} - 180°$
4º	replementar a $\widehat{x}$	$360° - \widehat{x}$

Exercícios resolvidos

1. Calcular

   a) $\operatorname{sen} 135°$ b) $\cos 135°$ c) $\operatorname{tg} 135°$

   Solução

   Como $135° \in 2^{\underline{o}}$ quadrante, vamos calcular o suplemento de $135°$

   $$\alpha = 180° - 135° = 45°$$

   No 2º quadrante o cosseno e a tangente são negativos e o seno é positivo, então

   $$\begin{aligned} &\operatorname{sen} 135° = \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\operatorname{tg} 135° = -\operatorname{tg} 45° = -1 \end{aligned}$$

2. Calcular o valor da expressão $y = \dfrac{\cos 2x + \operatorname{tg}^2 4x}{1 + \operatorname{sen} 3x}$, sabendo que $x = \dfrac{7\pi}{3}$.

   Solução $\quad x = \dfrac{7\pi}{3} = \dfrac{7 \cdot 180°}{3} = 420°$

   Como $420°$ ultrapassa a 1ª volta, vamos reduzí-lo $420° - 360° = 60°$.

   Substituindo o ângulo $(60°)$ na expressão, vem:

   $$y = \frac{\cos 120° + \operatorname{tg}^2 240°}{1 + \operatorname{sen} 180°} \qquad (1)$$

   Temos que $\cos 120° = -\cos 60°$, já que $120° \in 2^{\underline{o}}$ quadrante e o cosseno é negativo.

   $\operatorname{tg} 240° = \operatorname{tg}(240° - 180°) = \operatorname{tg} 60°$, já que $240° \in 3^{\underline{o}}$ quadrante e a tangente é positiva.

   $\operatorname{sen} 180° = 0$

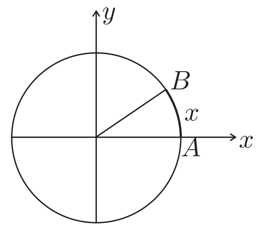
   Substituindo em (1) os valores obtidos, temos

   $$y = \frac{-\frac{1}{2} + (\sqrt{3})^2}{1 + 0} = \frac{5}{2}$$

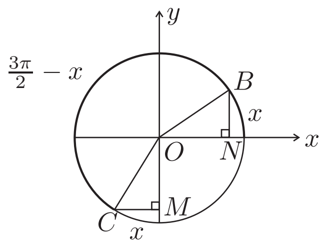
3. Mostre que $\operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x$.

Solução

Considere um arco $x \in 1^{\underline{o}}$ quadrante.



A partir de x, marcamos $\dfrac{3\pi}{2} - x$.



$\triangle ONB \equiv \triangle OMC$ pois

$$\begin{cases} OC = OB & \text{caso especial} \\ O\widehat{N}B = C\widehat{M}O = 90^\circ \\ B\widehat{O}N = C\widehat{O}M \end{cases}$$

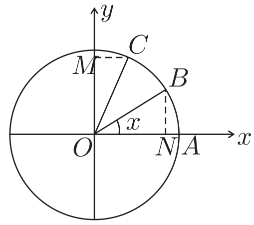
então $\operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x$ já que $\overline{OM} = -\overline{ON}$.

4. Simplificar a expressão $\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos(\pi - x)}{\operatorname{tg}(-x)}$.

Solução

Vamos simplificar cada uma das funções trigonométricas da expressão, considerando $x \in 1^{\underline{o}}$ quadrante.

$\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$



$\overset{\frown}{AC} = \dfrac{\pi}{2} - x$

Temos que $\triangle ONB \equiv \triangle OMC$.
Então $\overline{ON} = \overline{OM}$, daí $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

$\cos(\pi - x) = -\cos x$, já que $\pi - x \in 2^\circ$ quadrante
$\operatorname{tg}(-x) = \operatorname{tg}(360^\circ - x) = -\operatorname{tg} x$, já que $360^\circ - x \in 4^{\underline{o}}$ quadrante.

Substituindo esses valores na expressão dada vem:

$$\frac{\cos x \cdot (-\cos x)}{-\operatorname{tg} x} = \frac{-\cos^2 x}{-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = +\frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen} x}.$$

Exercícios propostos

1. Calcule:

   a) $\cos 150°$

   b) $\operatorname{tg} 210°$

   c) $\operatorname{sen} 240°$

   d) $\csc 300°$

2. Calcule $\operatorname{sen} 1920°$

3. Se $\cos x = \dfrac{3}{5}$, calcular $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$.

4. Calcule $x = \cos 20° + \cos 40° + \cos 60° + \ldots + \cos 180°$

5. Calcule o valor das expressões:

   a) $y = \dfrac{\operatorname{sen} 60° + \operatorname{tg} 315°}{\operatorname{cotg}(-45°) + \cos 210°}$

   b) $y = \dfrac{\operatorname{sen} 45° \cdot \operatorname{tg} 45° \cdot \operatorname{cotg} 45°}{\cos 210° \cdot \sec 240° \cdot \csc 300°}$

6. Simplificar a expressão:

   a) $y = \dfrac{\operatorname{sen}(2\pi - x) \cdot \cos(\pi - x)}{\operatorname{tg}(\pi - x)\operatorname{cotg}(2\pi - x)}$

   b) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{9\pi}{2}\right) - \cos\left(x + \dfrac{15\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}(7\pi - x)$

Gabarito

1. a) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ c) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

2. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3. $\dfrac{3}{5}$

4. $x = -1$

5. a) $7 - 4\sqrt{3}$ b) $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

6. a) $\operatorname{sen} x \cdot \cos x$ b) $\cos^2 x$

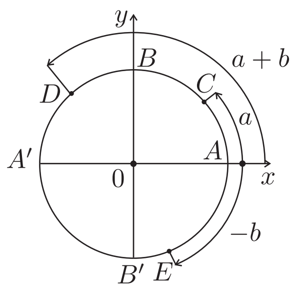
Aula 23 – Transformações

Funções Trigonométricas de arcos: soma; diferença; duplo; triplo; metade. Transformação em produto

Fórmula da Adição

Cosseno da Soma

Sejam C, D e E os pontos do ciclo associados aos números a, $a+b$ e $-b$, respectivamente. Em relação ao eixo cartesiano XOY as coordenadas desses pontos são:



$C = (\cos a, \operatorname{sen} a)$
$D = (\cos(a+b), \operatorname{sen}(a+b))$
$E = (\cos b, -\operatorname{sen} b)$
$A = (1, 0)$

Os arcos $\overset{\frown}{AD}$ e $\overset{\frown}{EC}$ têm a mesma medida, portanto, as cordas AD e CE são iguais, então:

$$
\begin{aligned}
d^2_{AD} &= (x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2 = [\cos(a+b) - 1]^2 + [\operatorname{sen}(a+b) - 0]^2 \\
&= 2 - 2\cos(a+b) \\
d^2_{EC} &= (x_C - x_E)^2 + (y_C - y_E)^2 = [\cos a - \cos b]^2 + [\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b]^2 \\
&= 2 - 2\cos a \cdot \cos b + 2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b
\end{aligned}
$$

Como $d_{AD} = d_{EC} \Rightarrow 2 - 2\cos a \cos b + 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = 2 - 2\cos(a+b)$.

Daí $\boxed{\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$.

Cosseno da Diferença

$$
\begin{aligned}
\cos(a-b) &= \cos(a+(-b)) = \cos a \cdot \cos(-b) - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen}(-b) \\
&= \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b
\end{aligned}
$$

então $\boxed{\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$

Seno da Soma

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(a+b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-(a+b)\right) = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-a\right)-b\right]\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cdot\cos b + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cdot\operatorname{sen} b\end{aligned}$$

então $\boxed{\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a\cdot\cos b + \operatorname{sen} b\cdot\cos a}$

Seno da Diferença

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a+(-b)) = \operatorname{sen} a\cos(-b) + \operatorname{sen}(-b)\cos a$$

Como $\cos(-b) = \cos b$ e $\operatorname{sen}(-b) = -\operatorname{sen} b$ então

$$\boxed{\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a\cos b - \operatorname{sen} b\cos a}.$$

Tangente da Soma

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\operatorname{sen} a\cos b + \operatorname{sen} b\cos a}{\cos a\cos b - \operatorname{sen} a\ \operatorname{sen}\ b}$$

Dividindo o numerador e o denominador por $\cos a\cos b \neq 0$, vem

$$\boxed{\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a\operatorname{tg} b}}$$

Observação: a, b e $(a+b)$ devem ser diferentes de $k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Tangente da Diferença

$$\operatorname{tg}(a-b) = \operatorname{tg}(a+(-b)) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg}(-b)}{1 - \operatorname{tg} a\cdot\operatorname{tg}(-b)}$$

Como $\operatorname{tg}(-b) = -\operatorname{tg} b$ temos

$$\boxed{\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a\operatorname{tg} b}}$$

Observação: a, b e $(a-b)$ devem ser diferentes de $k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

Cálculo de $\operatorname{cotg}(a+b)$

$$\operatorname{cotg}(a+b) = \frac{\cos(a+b)}{\operatorname{sen}(a+b)} = \frac{\cos a\cos b - \operatorname{sen} a\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a\cos b + \operatorname{sen} b\cos a}$$

Dividindo o numerador e o denominador por $\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b \neq 0$, vem:

$$\boxed{\operatorname{cotg}(a+b) = \frac{\operatorname{cotg} a\operatorname{cotg} b - 1}{\operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} b}}$$

Observação: a, b e $(a+b)$ devem ser diferentes de $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Cotangente da Diferença

$$\operatorname{cotg}(a-b)=\operatorname{cotg}(a+(-b))=\frac{\operatorname{cotg} a\cdot\operatorname{cotg}(-b)-1}{\operatorname{cotg} a+\operatorname{cotg}(-b)}$$

Como $\operatorname{cotg}(-b)=-\operatorname{cotg} b$ temos

$$\boxed{\operatorname{cotg}(a-b)=\frac{\operatorname{cotg} a\cdot\operatorname{cotg} b+1}{\operatorname{cotg} b-\operatorname{cotg} a}}$$

Observação: a, b e $(a-b)$ devem ser diferentes de $k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Exercícios Resolvidos

1. Calcular

   a) $\cos 75^\circ$

   b) $\operatorname{sen} 15^\circ$

   Solução

   a) $$\begin{aligned}\cos 75^\circ &= \cos(45^\circ+30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ-\operatorname{sen} 45^\circ\operatorname{sen} 30^\circ=\\ &=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}\Rightarrow\cos 75^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

   b) $$\begin{aligned}\operatorname{sen} 15^\circ &= \operatorname{sen}(45^\circ-30^\circ)=\operatorname{sen} 45^\circ\cos 30^\circ-\operatorname{sen} 30^\circ\cos 45^\circ\\ &=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

2. Calcular $\cos(a+b)$, sendo dado $\operatorname{sen} a=-\frac{3}{5}$ e $\cos b=-\frac{1}{3}$, sendo que $a\in 3^{\underline{o}}$ quadrante e $b\in 3^{\underline{o}}$ quadrante.

   Solução

   $1^{\underline{o}}$) Cálculo de $\cos a$

   $$\cos a=-\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}=-\frac{4}{5}$$

   $2^{\underline{o}}$) Cálculo de $\operatorname{sen} b$

   $$\operatorname{sen} b=-\sqrt{1-\cos^2 b}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

   $3^{\underline{o}}$) Cálculo de $\cos(a+b)$

   $$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a\cos b-\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b=-\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\\ &=+\frac{4}{15}-\frac{6\sqrt{2}}{15}=\frac{4-6\sqrt{2}}{15}\end{aligned}$$

3. Sabendo que $\operatorname{tg} a = \dfrac{2}{3}$ e $\operatorname{sen} b = -\dfrac{4}{5}$ com $b \in 4^{\underline{o}}$ quadrante. Calcular $\operatorname{tg}(a+b)$.

Solução

$1^{\underline{o}}$) $\cos b = +\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 b} = +\dfrac{3}{5}$

$2^{\underline{o}}$) $\operatorname{tg} b = \dfrac{-\frac{4}{5}}{+\frac{3}{5}} = -\dfrac{4}{3}$

$3^{\underline{o}}$) $\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} = \dfrac{\frac{2}{3} - \frac{4}{3}}{1 - \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)} = -\dfrac{6}{17}$

Exercícios Propostos

1. Determine o valor de:

   a) $\operatorname{sen} 75°$ b) $\cos 15°$ c) $\operatorname{tg} 15°$

2. Calcular $y = \operatorname{sen} 105° - \cos 75°$

3. Calcular $\operatorname{sen} x$, sabendo-se que $x+y = \dfrac{\pi}{4}$ e $\operatorname{sen} y = \dfrac{3}{5}$, $x \in 1^{\underline{o}}$ quadrante.

4. Se $\operatorname{tg}(x+y) = 33$ e $\operatorname{tg} x = 3$, determine $\operatorname{tg} y$.

5. Sabendo que $\operatorname{sen} x = \dfrac{15}{17}$, $\operatorname{sen} y = -\dfrac{3}{5}$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ e $\pi < y < \dfrac{3\pi}{2}$.
   Calcular $\operatorname{sen}(x+y)$, $\cos(x+y)$ e $\operatorname{tg}(x+y)$

6. Se a e b são ângulos agudos e positivos, provar que:
$$\operatorname{sen}(a+b) < \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b.$$

Gabarito

1. a) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ b) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ c) $2 - \sqrt{3}$

2. $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3. $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

4. 0,3

5. $\operatorname{sen}(x+y) = -\dfrac{84}{85}$, $\cos(x+y) = \dfrac{13}{85}$, $\operatorname{tg}(x+y) = -\dfrac{84}{13}$

6. Demonstração

Arco Duplo

Trata-se de obter as expressões das funções trigonométricas dos arcos da forma $2a$. É um caso particular das fórmulas de adição, é suficiente fazer $a = b$.

Cálculo de $\cos 2a$

$$\cos 2a = \cos(a+a) = \cos a \cos a - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \Rightarrow \cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$$

$$\boxed{\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a}$$

Cálculo de $\operatorname{sen} 2a$

$$\operatorname{sen} 2a = \operatorname{sen}(a+a) = \operatorname{sen} a \cos a + \operatorname{sen} a \cos a \Rightarrow \operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a$$

$$\boxed{\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a}$$

Cálculo $\operatorname{tg} 2a$

$$\operatorname{tg} 2a = \operatorname{tg}(a+a) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} a} = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}} \, , \left\{ \begin{array}{l} a \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z} \\ \text{e} \\ a \neq k\pi + \dfrac{\pi}{4}, \ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

Arco Triplo

Trata-se de obter as expressões das funções trigonométricas dos arcos da forma $3a$.

Cálculo de $\cos 3a$

Sabemos que:

$$\cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = \cos 2a \Rightarrow \cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \ \text{ e } \ \operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a$$

Logo,
$$\begin{aligned} \cos 3a &= \cos(2a + a) = \cos 2a \cos a - \operatorname{sen} 2a \operatorname{sen} a \\ &= (2\cos^2 a - 1)\cos a - 2\operatorname{sen}^2 a \cos a \\ &= 2\cos^3 a - \cos a - 2(1 - \cos^2 a)\cos a = 4\cos^3 a - 3\cos a \end{aligned}$$

Temos que $\boxed{\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a}$

Cálculo de $\operatorname{sen} 3a$

Sabemos que $\cos 2a = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a$ pois $\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$ e $\cos^2 a = 1 - \operatorname{sen}^2 a$.

Logo,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 3a &= \operatorname{sen}(2a + a) = \operatorname{sen} 2a \cos a + \operatorname{sen} a \cos 2a \\ &= 2\operatorname{sen} a \cos^2 a + (1 - 2\operatorname{sen}^2 a)\operatorname{sen} a \\ &= 2\operatorname{sen} a(1 - \operatorname{sen}^2 a) + (1 - 2\operatorname{sen}^2 a)\operatorname{sen} a = 3\operatorname{sen} a - 4\operatorname{sen}^3 a\end{aligned}$$

Temos que: $\boxed{\operatorname{sen} 3a = 3\operatorname{sen} a - 4\operatorname{sen}^3 a}$

Cálculo de $\operatorname{tg} 3a$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 3a &= \operatorname{tg}(2a + a) = \frac{\operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} a} = \frac{\frac{2\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a} + \operatorname{tg} a}{1 - \frac{2\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a}\operatorname{tg} a} \\ &= \frac{3\operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3\operatorname{tg}^2 a}\end{aligned}$$

$$\text{Daí } \boxed{\operatorname{tg} 3a = \frac{3\operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3\operatorname{tg}^2 a}}, \quad \left\{\begin{array}{l} a \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2} \\ \text{e} \\ a \neq k\pi + \dfrac{\pi}{6}\end{array}\right.$$

Arco Metade

Consiste em relacionar as funções de um arco b com as funções do arco $\frac{b}{2}$.

Destacam-se os seguintes casos:

Dado $\cos b$, obter $\cos\frac{b}{2}$, $\operatorname{sen}\frac{b}{2}$ e $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$.

Cálculo de $\cos\frac{b}{2}$

Sendo $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$, fazendo $2a = b$ e daí $a = \frac{b}{2}$ temos:

$$\cos b = 2cos^2\frac{b}{2} - 1 \Rightarrow \boxed{\cos\frac{b}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos b}{2}}}$$

Cálculo de $\operatorname{sen}\frac{b}{2}$

Sendo $\cos 2a = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a$, fazendo $2a = b$ e daí $a = \frac{b}{2}$ temos:

$$\cos b = 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{b}{2} \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}\frac{b}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos b}{2}}}$$

Cálculo de $\operatorname{tg}\dfrac{b}{2}$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{b}{2}\right)=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)}$$

Daí $\operatorname{tg}\left(\frac{b}{2}\right)=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos b}{1+\cos b}},\ b\neq 2k\pi+\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

Observação:

Os sinais $\pm$ das expressões só tem sentido quando se conhece $\cos b$, sem conhecer b.

Dado $\operatorname{tg}\left(\dfrac{b}{2}\right)=t$**, obter** $\operatorname{sen} b$**,** $\cos b$ **e** $\operatorname{tg} b$

Cálculo de $\operatorname{tg} b$

$$\operatorname{tg}2a=\frac{2\operatorname{tg}a}{1-\operatorname{tg}^2 a},\text{ fazendo } 2a=b\Rightarrow a=\frac{b}{2}.$$

Logo, $\operatorname{tg} b=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{b}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{b}{2}}=\dfrac{2t}{1-t^2}\Rightarrow \operatorname{tg} b=\dfrac{2t}{1-t^2};\quad \begin{cases} b\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}\\ \text{e}\\ b\neq 2k\pi+\pi\end{cases}\quad (k\in\mathbb{Z})$

Cálculo de $\operatorname{sen} b$

Sendo $\operatorname{sen}2a=2\operatorname{sen}a\cos a$, fazendo $2a=b$ e portanto $a=\dfrac{b}{2}$, concluímos que $\operatorname{sen} b=2\operatorname{sen}\dfrac{b}{2}\cos\dfrac{b}{2}$;

$$\operatorname{sen} b=\frac{2\operatorname{sen}\frac{b}{2}\cos^2\frac{b}{2}}{\cos\frac{b}{2}};\quad (b\neq 2k\pi+\pi,\ k\in\mathbb{Z})$$

$$\operatorname{sen} b=\frac{2\operatorname{tg}\frac{b}{2}}{\sec^2\frac{b}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{b}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{b}{2}}$$

Portanto, $\operatorname{sen} b=\dfrac{2t}{1+t^2};\ (b\neq 2k\pi+\pi,\ k\in\mathbb{Z})$

Cálculo de $\cos b$

$$\cos b=\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1-t^2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2};\quad \left(b\neq\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right)$$

Exercícios Resolvidos

1. Calcular $\operatorname{sen} 2a$ e $\cos 2a$, sendo dado $\cos a = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$, $a \in 1^{\underline{o}}$ quadrante.

   Solução

   $1^{\underline{o}}$) Cálculo de $\operatorname{sen} a$

   $$\operatorname{sen} a = +\sqrt{1-\cos^2 a} = \frac{2}{3}$$

   $2^{\underline{o}}$) Cálculo de $\operatorname{sen} 2a$

   $$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

   $3^{\underline{o}}$) Cálculo de $\cos 2a$

   $$\cos 2a = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a = 1 - 2 \cdot \frac{4}{9} = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

2. Simplificar a expressão $y = \dfrac{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen}^3 x}{\cos^3 x + \cos 3x}$, $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

   Solução

   $$y = \frac{3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen}^3 x}{\cos^3 x - (4\cos^3 x - 3\cos x)} = \frac{3\operatorname{sen} x - 3\operatorname{sen}^3 x}{3\cos x - 3\cos^3 x}$$

   $$y = \frac{3\operatorname{sen} x(1-\operatorname{sen}^2 x)}{3\cos x(1-\cos^2 x)} = \frac{\operatorname{sen} x \cos^2 x}{\cos x \operatorname{sen}^2 x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow y = \operatorname{cotg} x$$

3. Calcular $\cos 2x$, sabendo que $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{3}$ e $x \in 4^{\underline{o}}$ quadrante.

   Solução

   $$\text{Temos} \begin{cases} \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}} \\[2ex] \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

   então $\dfrac{1}{3} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x} \Rightarrow \cos x = \dfrac{4}{5}$, já que $x \in 4^{\underline{o}}$ quadrante.

   Mas $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 - 1 = \dfrac{7}{25} \Rightarrow \cos 2x = \dfrac{7}{25}$.

4. Calcular $\cos 22°30'$

   Solução

   Temos que $\cos \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$

   Façamos $\dfrac{x}{2} = 22°30' \Rightarrow x = 45°$.

   Então $\cos 22°30' = +\sqrt{\dfrac{1+\cos 45°}{2}} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

5. Provar que $\dfrac{2\,\text{sen}\,x}{\cos 3x + \cos x} = \sec 2x \cdot \text{tg}\,x$

   Solução

   De fato,
$$\begin{aligned}\frac{2\,\text{sen}\,x}{\cos 3x+\cos x} &= \frac{2\,\text{sen}\,x}{4\cos^3 x - 3\cos x + \cos x} = \frac{2\,\text{sen}\,x}{4\cos^3 x - 2\cos x}\\ &= \frac{\text{sen}\,x}{2\cos^3 x - \cos x} = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x(2\cos^2 x - 1)}\\ &= \frac{\text{sen}\,x}{\cos x \cdot \cos 2x} = \sec 2x \cdot \text{tg}\,x\end{aligned}$$

6. Calcular $\text{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$, sabendo-se que $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

   Solução

   Sabemos que $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \dfrac{2t}{1+t^2} + \dfrac{1-t^2}{1+t^2} = 1$, $t = \text{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

   Vem: $2t + 1 - t^2 = 1 + t^2 \Rightarrow 2t^2 - 2t = 0 \Rightarrow t = 0$ ou $t = 1$.

   Daí $\boxed{\text{tg}\,\dfrac{x}{2} = 0 \text{ ou } \text{tg}\,\dfrac{x}{2} = 1}$

Exercícios Propostos

1. Se $\text{sen}\,a = \dfrac{4}{5}$, calcular: a) $\text{sen}\,2a$ b) $\cos 2a$
2. Se $\text{sen}\,a - \cos a = \dfrac{1}{5}$, calcule $\text{sen}\,2a$
3. Se $y = 3 + \text{sen}\,x\cos x$, $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$. Determine o maior valor que y pode assumir.
4. Calcular $y = \text{sen}^2\dfrac{\pi}{12} - \cos^2\dfrac{\pi}{12} + \text{tg}\,\dfrac{\pi}{3} + \text{tg}\,\dfrac{14\pi}{3}$.
5. Se $\text{tg}\,x = m$ e $\text{tg}\,2x = 3m$, $m > 0$. Determine o ângulo x.
6. Se $\text{tg}\,a = \dfrac{1}{7}$ e $\text{sen}\,b = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, calcular $\text{tg}(a + 2b)$.
7. Sabendo que $\cos 36° = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$, determine $\cos 72°$.
8. Se $\text{sen}\,x \cdot \cos x = 0,04$, determine $\text{cotg}^2\,2x$.
9. Sabendo que $\text{sen}\,\theta = \dfrac{3}{5}$ e $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$, calcule
$$A = 25\,\text{sen}\,\theta + 10\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}$$
10. Simplificar $y = \dfrac{6 + 2\cos 4x}{1 - \cos 4x}$ em função de $\text{tg}\,x = t$.

Gabarito

1. a) $\operatorname{sen} 2a = \pm\dfrac{24}{25}$ b) $\cos 2a = -\dfrac{7}{25}$
2. $\dfrac{24}{25}$
3. $\dfrac{7}{2}$
4. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
5. $180°k + 30°,\ k \in \mathbb{Z}$
6. 1
7. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$
8. $\dfrac{9}{16}$
9. $15 + 3\sqrt{10}$
10. $y = \dfrac{1+t^4}{t^2}$

Transformação em Produto

O problema consiste em transformar certas expressões, que aparecem soma de funções trigonométricas de um ou mais arcos, em expressões onde aparecem apenas produto de funções trigonométricas dos mesmos arcos de outros arcos com eles relacionados.

Já sabemos que

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \quad &\text{(i)}\\
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \quad &\text{(ii)}\\
\operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a \quad &\text{(iii)}\\
\operatorname{sen}(a-b) &= \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a \quad &\text{(iv)}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
\text{(i)+(ii)} & \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b & \text{(v)}\\
\text{(i)}-\text{(ii)} & \cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b & \text{(vi)}\\
\text{(iii)+(iv)} & \operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = 2\operatorname{sen} a \cos b & \text{(vii)}\\
\text{(iii)}-\text{(iv)} & \operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) = 2\operatorname{sen} b \cos a & \text{(viii)}
\end{array}$$

As expressões assim obtidas chamam-se Fórmulas de Reversão ou Fórmulas de Werner.

Fazendo $\begin{cases} a+b=p \\ a-b=q \end{cases}$ e resolvendo este sistema vem $\begin{array}{l} a = \dfrac{p+q}{2} \\ b = \dfrac{p-q}{2} \end{array}$

Das fórmulas de reversão vem:

$$\begin{aligned}
\cos p + \cos q &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) && \text{(ix)}\\
\cos p - \cos q &= -2\,\mathrm{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right) && \text{(x)}\\
\mathrm{sen}\, p + \mathrm{sen}\, q &= 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) && \text{(xi)}\\
\mathrm{sen}\, p - \mathrm{sen}\, q &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right) && \text{(xii)}
\end{aligned}$$

Temos que

$$\mathrm{tg}\, p \pm \mathrm{tg}\, q = \frac{\mathrm{sen}\, p}{\cos p} \pm \frac{\mathrm{sen}\, q}{\cos q} = \frac{\mathrm{sen}\, p \cos q \pm \cos p\, \mathrm{sen}\, q}{\cos p \cdot \cos q}$$

Daí

$$\begin{aligned}
\mathrm{tg}\, p + \mathrm{tg}\, q &= \frac{\mathrm{sen}(p+q)}{\cos p \cos q} && \text{(xiii)}\\
\mathrm{tg}\, p - \mathrm{tg}\, q &= \frac{\mathrm{sen}(p-q)}{\cos p \cos q} && \text{(xiv)}
\end{aligned}$$

De forma similar temos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{cotg}\, p + \mathrm{cotg}\, q &= \frac{\mathrm{sen}(p+q)}{\mathrm{sen}\, p \cdot \mathrm{sen}\, q} && \text{(xv)}\\
\mathrm{cotg}\, p - \mathrm{cotg}\, q &= -\frac{\mathrm{sen}(p-q)}{\mathrm{sen}\, p \cdot \mathrm{sen}\, q} && \text{(xvi)}
\end{aligned}$$

As fórmulas de (ix) a (xvi) chamam-se Fórmulas de Transformações em Produto ou Fórmulas de Prostaférese.

Exercícios Resolvidos

1. Transformar em produto: $\mathrm{sen}\, p - \cos p$

   Solução

$$\begin{aligned}
\mathrm{sen}\, p - \cos p &= \mathrm{sen}\, p - \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} - p\right) = 2\cos\left(\frac{p + \frac{\pi}{2} - p}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{p - \left(\frac{\pi}{2} - p\right)}{2}\right)\\
&= 2\cos\frac{\pi}{4} \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{2p - \frac{\pi}{2}}{2}\right) = 2\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \mathrm{sen}\left(p - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(p - \frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

2. Transformar em produto: $1 + \operatorname{tg} a$

   Solução

   $$1+\operatorname{tg} a = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+a\right)}{\cos\frac{\pi}{4}\cos a} = \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+a\right)}{\sqrt{2}\cos a} = \frac{\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+a\right)}{\cos a}$$

3. Calcular o valor da expressão $y = 2\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{12}\cdot\cos\dfrac{5\pi}{12}$.

   Solução

   Como $2\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)$

   $$y = 2\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} = \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\right)$$
   $$= \operatorname{sen}\pi + \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

   Logo, $y = \dfrac{1}{2}$

4. Simplificar $y = \dfrac{\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x}{\cos 2x - \cos 4x}$

   Solução

   $$y = \frac{\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x}{\cos 2x - \cos 4x} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{2x+4x}{2}\cos\frac{2x-4x}{2}}{-2\operatorname{sen}\frac{2x+4x}{2}\operatorname{sen}\frac{2x-4x}{2}}$$
   $$y = \frac{2\operatorname{sen} 3x\cos(-x)}{-2\operatorname{sen} 3x\operatorname{sen}(-x)} = \frac{2\operatorname{sen} 3x\cos x}{2\operatorname{sen} 3x\operatorname{sen} x} = \operatorname{cotg} x$$
   $$\Rightarrow y = \operatorname{cotg} x$$

5. Determine a soma $\operatorname{sen} 75^\circ - \cos 75^\circ$

   Solução

   $$\operatorname{sen} 75^\circ - \cos 75^\circ = \operatorname{sen} 75^\circ - \operatorname{sen} 15^\circ = 2\cos\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\operatorname{sen}\frac{75^\circ-15^\circ}{2}$$
   $$= 2\cos 45^\circ\cdot\operatorname{sen} 30^\circ = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exercícios Propostos

1. Simplificar $y = \dfrac{\cos 6x + \cos 4x}{\operatorname{sen} 6x - \operatorname{sen} 4x}$
2. Calcular $y = \cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ$
3. Simplificar $\dfrac{\cos(a-3b) - \cos(3a-b)}{\operatorname{sen} 2a + \operatorname{sen} 2b}$
4. Transformar em produto: $y = \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x$
5. Calcular $y = \cos\dfrac{\pi}{12}\cdot\cos\dfrac{8\pi}{12}$

6. Se a e b são ângulos complementares, $0 < a < \frac{\pi}{2}$, $0 < b < \frac{\pi}{2}$ e $\frac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b} = \sqrt{3}$, determine $\operatorname{sen} \frac{3a}{5} + \cos 3b$

7. Transformar em produto: $y = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 3x$

8. Calcular $y = \operatorname{tg} 9° - \operatorname{tg} 27° - \operatorname{tg} 63° + \operatorname{tg} 81°$

Gabarito

1. $y = \operatorname{cotg} x$

2. $y = \frac{1}{8}$

3. $2 \operatorname{sen}(a - b)$

4. $y = 2 \operatorname{sen} 2x \cdot \cos x$

5. $-\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{8}\right)$

6. $\sqrt{2}$

7. $y = -\operatorname{sen} 2x \cdot \operatorname{sen} 4x$

8. $y = 4$

Aula 24 – Equações Trigonométricas

Equações Fundamentais

Considere f e g duas funções trigonométricas. Resolver a equação trigonométrica $f(x) = g(x)$ significa determinar o conjunto S, denominado conjunto solução dos números r para os quais $f(r) = g(r)$ é uma sentença verdadeira.

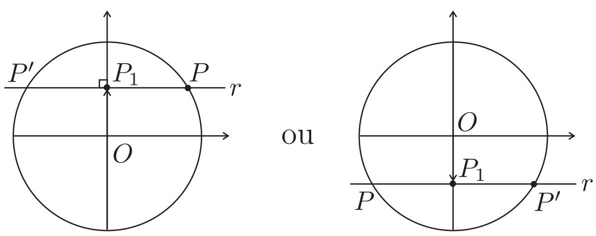
Quase todas as equações trigonométricas reduzem-se a uma das três equações seguintes:

1ª) $\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} b$ 2ª) $\cos a = \cos b$ 3ª) $\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} b$

denominadas, por este motivo, equações fundamentais.

Equação do tipo $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta$

Se $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta = \overline{OP_1}$, então as imagens de α e β no ciclo estão sobre a reta r que é perpendicular ao eixo dos senos no ponto P_1, isto é, estão em P ou P'.



Há, portanto, duas possibilidades:

1ª) α e β têm a mesma imagem, isto é, são côngruos.

2ª) α e β têm imagens simétricas em relação ao eixo dos senos, isto é, são suplementares.

Portanto

$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z}}$$

Exercícios Resolvidos

1. Resolver as seguintes equações em $\mathbb{R}$.

   a) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{10}$

   b) $\csc x = -2$

   c) $\operatorname{sen} 3x = 1$

   Solução

   a) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{10} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{10} + 2k\pi \\ \quad \text{ou} \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{10} + 2k\pi \end{cases}$

   Temos a solução

   $$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{10} + 2k\pi \ \text{ ou } \ x = \frac{9\pi}{10} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

   b) $\csc x = -2$

   $$\frac{1}{\operatorname{sen} x} = -2 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} = \operatorname{sen} \frac{7\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ \quad \text{ou} \\ x = \pi - \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

   Daí a solução

   $$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \ \text{ ou } \ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

   c) $\operatorname{sen} 3x = 1 = \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 3x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}$

   A solução é

   $$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2. Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$, que satisfazem a equação $4 \operatorname{sen}^4 x - 11 \operatorname{sen}^2 x + 6 = 0$.

   Solução

   $$4 \operatorname{sen}^4 x - 11 \operatorname{sen}^2 x + 6 = 0$$

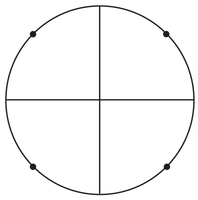
   Considere $\operatorname{sen}^2 x = y$, temos: $4y^2 - 11y + 6 = 0$

   $$y = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{8} \Rightarrow y = \begin{cases} 2 \\ \frac{3}{4} \end{cases}$$

   Se $y = \operatorname{sen}^2 x = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$ (Falso, já que $-1 \le \operatorname{sen} x \le 1$)

   $$y = \operatorname{sen}^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Resolvendo $\operatorname{sen} x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, vem:



$$\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{3} \\ \quad \text{ou} \\ x = 2k\pi + \pi - \dfrac{\pi}{3} = 2k\pi - \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$$

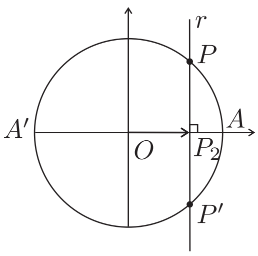
$$\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \dfrac{4\pi}{3} \\ \quad \text{ou} \\ x = 2k\pi + \pi - \dfrac{4\pi}{3} = 2k\pi - \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

Podemos escrever então que a solução S é:

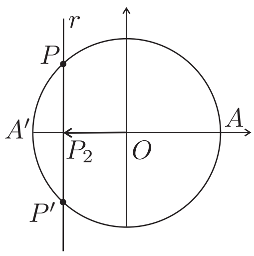
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \pm \frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Equação do Tipo $\cos a = \cos b$

Se $\cos\alpha = \cos\beta = OP_2$, então as imagens de α e β no ciclo estão sobre a reta r que é perpendicular ao eixo dos cossenos no ponto P_2, isto é, estão em P ou P'.



ou



Há portanto duas possibilidades:

1ª) α e β têm a mesma imagem, isto é, são côngruos.

2ª) α e β têm imagens simétricas em relação ao eixo dos cossenos, isto é, são replementares.

Portanto

$$\boxed{\cos\alpha = \cos\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \quad \text{ou} \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases},\ k \in \mathbb{Z}}$$

Exercícios Resolvidos

1. Resolver as seguintes equações em $\mathbb{R}$

   a) $\cos x = \cos \dfrac{\pi}{20}$

   b) $\sec x = \sec \dfrac{2\pi}{3}$

   c) $\cos 4x = -1$

   Solução

   a) $\cos x = \cos \dfrac{\pi}{20} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \dfrac{\pi}{20}$

   $$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{20},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

   b) $\sec x = \sec \dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{\cos \frac{2\pi}{3}} \Rightarrow \cos x = \cos \dfrac{2\pi}{3}$

   $$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

   c) $\cos 4x = -1 \Rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}$

   $$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2. Resolver a equação $2 - 2\cos x = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} x$ em $\mathbb{R}$

   Solução

   $2 - 2\cos x = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} x$

   $2 - 2\cos x = \operatorname{sen} x \cdot \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow 2\cos x - 2\cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$

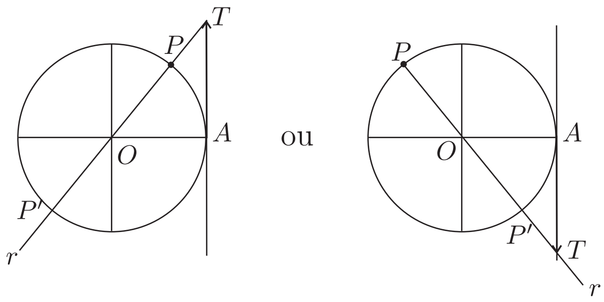
   $\Rightarrow 2\cos x - 2\cos^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x - 2\cos x + 1 = 0$

   $\cos x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} \Rightarrow \cos x = \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases}$ Logo, $x = 2k\pi$.

   $$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \}$$

Equação do tipo $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$

Se $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \overline{AT}$, então as imagens de α e β estão sobre a reta r determinada por O e T, isto é, estão em P ou P'.



Há, portanto, duas possibilidades:

1ª) α e β têm a mesma imagem, isto é, são côngruos.

2ª) α e β têm imagens simétricas em relação ao centro do ciclo, isto é, são explementares.

Portanto

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \quad \text{ou} \\ \alpha = \pi + \beta + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$$

Exercícios Resolvidos

1. Resolver as seguintes equações:

a) $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} 4x$

b) $\operatorname{tg} 3x = 1$

c) $\operatorname{tg} 4x = -\sqrt{3}$

Solução

a) $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} 4x \Rightarrow 5x = 4x + k\pi \Rightarrow x = k\pi$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

b) $\operatorname{tg} 3x = 1 = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow 3x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{3}$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

c) $\operatorname{tg} 4x = -\sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg} 4x = \operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow 4x = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{4}$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

2. Resolver a equação $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg} x$.

   Solução

   $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg} x \Rightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \operatorname{tg} x \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0$

   $\Rightarrow \operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x - 1) = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 0$ ou $\operatorname{tg} x = 1$

   $$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = k\pi + \frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Soluções de uma equação dentro de um certo intervalo

Quando tivermos resolvendo uma equação pertencente a um determinado intervalo I devemos fazer o seguinte procedimento:

1º) Resolvemos normalmente a equação, não tomando conhecimento do intervalo I até obtermos a solução geral.

2º) Obtida a solução geral, atribuímos a $k \in \mathbb{Z}$ todos os valores inteiros que acarretem as soluções estarem em I.

Exercícios Resolvidos

1. Determinar $x \in [0, 2\pi]$ tal que $\operatorname{sen} 4x = \dfrac{1}{2}$

   Solução

   $\operatorname{sen} 4x = \dfrac{1}{2}, \quad x \in [0, 2\pi]$

   $$\operatorname{sen} 4x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} 4x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \quad \text{ou} \\ 4x = \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{24} + \dfrac{2k\pi}{4} \\ \quad \text{ou} \\ x = \dfrac{5\pi}{24} + \dfrac{2k\pi}{4} \end{cases}$$

   Vamos calcular as soluções que pertencem ao intervalo $[0, 2\pi]$

   $k = 0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{\pi}{24}, \quad x_2 = \dfrac{5\pi}{24}$

   $k = 1 \Rightarrow x_3 = \dfrac{13\pi}{24}, \quad x_4 = \dfrac{17\pi}{24}$

   $k = 2 \Rightarrow x_5 = \dfrac{25\pi}{24}, \quad x_6 = \dfrac{29\pi}{24}$

   $k = 3 \Rightarrow x_7 = \dfrac{37\pi}{24}, \quad x_8 = \dfrac{41\pi}{24}$

   $k = 4$ vamos achar $\dfrac{49\pi}{24}$ e $\dfrac{53\pi}{24}$

   Estas soluções não pertencem ao intervalo fechado de 0 a π.

   $$S = \left\{ \frac{\pi}{24}, \frac{5\pi}{24}, \frac{13\pi}{24}, \frac{17\pi}{24}, \frac{25\pi}{24}, \frac{29\pi}{24}, \frac{37\pi}{24}, \frac{41\pi}{24} \right\}$$

2. Achar as soluções de $\operatorname{tg} 6x = \operatorname{tg} 2x$ para $0 \leq x \leq 2\pi$.

   Solução

   $\operatorname{tg} 6x = \operatorname{tg} 2x,\ x \in [0, 2\pi]$

   $\Rightarrow 6x = 2x + k\pi \Rightarrow 4x = k\pi \Rightarrow x = \dfrac{k\pi}{4}$

   $$\begin{array}{lll} k = 0 \Rightarrow x = 0 & k = 3 \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{4} & k = 6 \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{2} \\ k = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} & k = 4 \Rightarrow x = \pi & k = 7 \Rightarrow x = \dfrac{7\pi}{4} \\ k = 2 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} & k = 5 \Rightarrow x = \dfrac{5\pi}{4} & k = 8 \Rightarrow x = 2\pi \end{array}$$

   Excluindo os valores $\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{5\pi}{4},\ \dfrac{7\pi}{4}$ para os quais não existem as tangentes de $6x$ e $2x$, vem:

   $$S = \left\{0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right\}$$

3. Encontre a soma das raízes da equação $\cos 2x = 0$ no intervalo $[0, \pi]$.

   Solução

   $\cos 2x = 0$

   Temos que $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$.

   Daí $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0$

   Portanto, $2x = 2k\pi \pm \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi \pm \dfrac{\pi}{4}$ (Solução Geral).

   No intervalo $[0, \pi]$ temos as soluções:

   $k = 0 \Rightarrow x = 0\pi + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$

   $k = 1 \Rightarrow x = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$

   Assim, a soma das raízes é $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3\pi}{4} = \pi$

Equações Clássicas

Sugestões para resolver a equação: $a \operatorname{sen} x + b \cos x = c \quad (a, b, c \in \mathbb{R}^*)$

Método 1

Fazer mudança de variável

$\operatorname{sen} x = u$ e $\cos x = v$ e resolvemos o sistema $\begin{cases} au + bv = c \\ u^2 + v^2 = 1 \end{cases}$

Calculando u e v, determinamos os possíveis valores de x.

Método 2

Fazendo $\dfrac{b}{a} = \operatorname{tg}\theta$, temos:

$a \operatorname{sen} x + b\cos x = c \Rightarrow \operatorname{sen} x + \dfrac{b}{a}\cos x = \dfrac{c}{a} \Rightarrow \operatorname{sen} x + \operatorname{tg}\theta \cos x = \dfrac{c}{a}$

$\Rightarrow \operatorname{sen} x + \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \cdot \cos x = \dfrac{c}{a} \Rightarrow \operatorname{sen} x \cos\theta + \operatorname{sen}\theta \cos x = \dfrac{c}{a}\cos\theta$

$\Rightarrow \operatorname{sen}(x+\theta) = \dfrac{c}{a}\cos\theta$, e daí calculamos $x+\theta$.

Método 3

Fazendo $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$, temos $\operatorname{sen} x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ e $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, então:

$a \operatorname{sen} x + b\cos x = c \Rightarrow a \cdot \dfrac{2t}{1+t^2} + b\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right) = c \Rightarrow 2at + b - bt^2 = c + ct^2$

$\Rightarrow (c+b)t^2 - 2at + c - b = 0$ e recaímos em uma equação de 2º grau em t. Observe que este método falha se $\pi + 2k\pi$ for solução da equação, caso em que a substituição $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2} = t$ não tem sentido.

Exercício Resolvido

1. Resolver a equação $3\cos x + \sqrt{3}\operatorname{sen} x = 3$.

Solução

Vamos resolver esse exercício pelos três métodos.

Método 1

Fazendo $\operatorname{sen} x = u$ e $\cos x = v$, temos:

$$\begin{cases} 3v + \sqrt{3}u = 3 & (1) \\ u^2 + v^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

De (1) vem: $u = \dfrac{3-3v}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \sqrt{3}v$ (3)

Substituindo (3) em (2) vem: $(\sqrt{3} - \sqrt{3}v)^2 + v^2 = 1$

$3 - 6v + 3v^2 + v^2 = 1 \Rightarrow 4v^2 - 6v + 2 = 0 \Rightarrow 2v^2 - 3v + 1 = 0$

$v = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} \quad \Rightarrow v = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$

Portanto, $u = 0$ ou $u = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Existem, assim, duas possibilidades:

$$\cos x = 1, \quad \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 2k\pi$$

ou

$$\cos x = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \text{ ou } x = 2k\pi + \frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Método 2

$$3\cos x+\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x=3 \Rightarrow \cos x+\frac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{sen}\,x=1 \Rightarrow \cos x+\mathrm{tg}\,30^o\,\mathrm{sen}\,x=1$$

$$\Rightarrow \cos x+\frac{\mathrm{sen}\,30^o}{\cos 30^o}\,\mathrm{sen}\,x=1 \Rightarrow \cos 30^o\cos x+\mathrm{sen}\,30^o\,\mathrm{sen}\,x=\cos 30^o$$

$$\Rightarrow \cos(30^o-x)=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos(x-30^o)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow x-30^o=360^o k\pm 30^o$$

$$x-30^o=360^o k+30^o \Rightarrow x=360^o k+60^o$$

ou

$$x-30^o=360^o k-30^o \Rightarrow x=360^o k$$

$$S=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x=2k\pi \ \text{ ou } \ x=2k\pi+\frac{\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Método 3

Fazendo $tg\dfrac{x}{2}=t$, sabemos que $\mathrm{sen}\,x=\dfrac{2t}{1+t^2}$ e $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, então:

$$3\cos x+\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x=3 \Rightarrow 3\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)+\sqrt{3}\cdot\frac{2t}{1+t^2}=3$$

$$\Rightarrow 3(1-t^2)+2\sqrt{3}t=3+3t^2 \Rightarrow 3-3t^2+2\sqrt{3}t=3+3t^2$$

$$6t^2-2\sqrt{3}t=0 \ \Rightarrow \ t=0 \text{ ou } t=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Se $\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}=0 \Rightarrow \dfrac{x}{2}=k\pi \Rightarrow x=2k\pi$

Se $\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \dfrac{x}{2}=k\pi+\dfrac{\pi}{6} \Rightarrow x=2k\pi+\dfrac{\pi}{3}$

$$S=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x=2k\pi \ \text{ ou } \ x=2k\pi+\frac{x}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Sugestão para resolver as equações

$$\sum_{i=1}^{m}\mathrm{sen}\,f_i(x)=0 \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^{m}\cos f_i(x)=0$$

O método de resolução consiste em transformar a soma em produto e estudar as possibilidades do anulamento de cada fator.

1. Resolver as equações em $\mathbb{R}$

   a) $\mathrm{sen}\,7x+\mathrm{sen}\,5x=0$

   b) $\cos 6x+\cos 4x=0$

Solução

a) $\operatorname{sen} 7x + \operatorname{sen} 5x = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen} 6x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} 6x = 0$ ou $\cos x = 0$.

Se $\operatorname{sen} 6x = 0 \Rightarrow 6x = k\pi \Rightarrow x = \dfrac{k\pi}{6}$

Se $\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{6} \text{ ou } x = k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

b) $\cos 6x + \cos 4x = 0 \Rightarrow 2\cos 5x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow \cos 5x = 0$ ou $\cos x = 0$.

Se $\cos 5x = 0 \Rightarrow 5x = k\pi + \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = \dfrac{k\pi}{5} + \dfrac{\pi}{10}$

Se $\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{5} + \frac{\pi}{10} \text{ ou } x = k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2. Calcular $x \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x = 0$.

Solução

Vamos transformar $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 5x$ em produto

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 5x = 2\operatorname{sen} 3x \cos 2x$$

Daí $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen} 3x \cos 2x + \operatorname{sen} 3x = 0$

$\Rightarrow \operatorname{sen} 3x(2\cos 2x + 1) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} 3x = 0$ ou $2\cos 2x + 1 = 0$

Se $\operatorname{sen} 3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \dfrac{k\pi}{3}$

Se $\cos 2x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow 2x = (2k+1)\pi \pm \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow x = \dfrac{(2k+1)\pi}{2} \pm \dfrac{\pi}{12}$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{(2k+1)\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Sugestão para resolver a equação do tipo $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = a \quad (a \in \mathbb{R})$

Vamos usar a identidade $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = 1 - \dfrac{\operatorname{sen}^2 2x}{2} \qquad (*)$

Vamos provar $(*)$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x &= (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \\ &= 1 - 2\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{2} \end{aligned}$$

Temos então:

$$\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = a \Rightarrow 1 - \frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{2} = a \Rightarrow \operatorname{sen}^2 2x = 2 - 2a = 2(1-a)$$

Só existe solução se $0 \leq 2(1-a) \leq 1$, ou seja, $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$.

Exercício Resolvido

1. Resolver a equação $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$

   Solução

   Temos que $\operatorname{sen}^2 2x = 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1$. Portanto, $\operatorname{sen} 2x = \pm 1$. Então $2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \pm \frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Sugestão para resolver a equação do tipo $\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = a \quad (a \in \mathbb{R})$

Vamos usar a identidade $\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = 1 - \dfrac{3\operatorname{sen}^2 2x}{4} \qquad (**)$

Vamos provar $(**)$

$$\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)(\operatorname{sen}^4 x - \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) =$$
$$= \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x - \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{2} - \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{4} = 1 - \frac{3\operatorname{sen}^2 2x}{4}$$

Temos então

$$\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = a \Rightarrow 1 - \frac{3\operatorname{sen}^2 2x}{4} = a \Rightarrow \operatorname{sen}^2 2x = \frac{4-4a}{3}$$

Note que só existe relação se $0 \leq \dfrac{4-4a}{3} \leq 1$, ou seja, $\dfrac{1}{4} \leq a \leq 1$.

Exercício Resolvido

1. Resolver a equação $\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8}$

   Solução

   Temos que $\operatorname{sen}^2 2x = \frac{4}{3}(1-a) = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{5}{8}\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$.

   Portanto, $\operatorname{sen} 2x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Então $2x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exercícios Propostos

1. Resolva as seguintes equações trigonométricas:

   a) $\sec x = 2$

   b) $\operatorname{sen} x = -\dfrac{1}{2}$

   c) $\operatorname{sen}(\pi - x) = 0$

   d) $\operatorname{tg}\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

2. Calcule $x \in \mathbb{R}$ nas equações trigonométricas:

   a) $\sec x = \cos x$

   b) $\cos x = \sqrt{3}\operatorname{sen} x$

3. Resolva as seguintes equações:

   a) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x = 0$

   b) $\cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x$

   c) $\cos 2x - \cos^2 x = -1$

   d) $\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} x = \sec x \cdot \csc x$

   e) $\operatorname{tg}^4 x - 4\operatorname{tg}^2 x + 3 = 0$

   f) $\cos 2x = 3\operatorname{sen} x + 2$

4. Achar as soluções de $\operatorname{sen} x - \cos x = 1$ para $0 \leq x \leq 2\pi$.

5. Resolva a equação $2^{\operatorname{sen} x} = (4^{\operatorname{sen} x})^{\cos x}$, sabendo que $0^{\text{o}} < x < 360^{\text{o}}$.

6. Determine as soluções da equação $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = 1$, satisfazendo a condição $0 \leq x \leq 2\pi$.

7. Sendo $0 \leq x \leq 2\pi$, determine a soma das raízes da equação $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}(-x) = 0$.

8. Resolva as seguintes equações em $\mathbb{R}$:

   a) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 6x = 0$

   b) $\operatorname{sen} 7x + \cos 3x = \cos 5x - \operatorname{sen} x$

9. Resolva a equação $\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 2$ em $\mathbb{R}$.

10. Resolva as seguintes equações:

    a) $\cos x + \cos^2 x = \dfrac{3}{4}, \quad -\pi < x < \pi$

    b) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^3 x + \cdots = 1, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

Gabarito

1. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

   b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi + \frac{4\pi}{3} \text{ ou } x = 2k\pi - \frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

   c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi(1-k),\ k \in \mathbb{Z}\}$

   d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

2. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

   b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi + \frac{\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

3. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = (2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

   b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

   c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

   d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

   e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \pm \frac{\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

   f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = k\pi - (-1)^k\frac{\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

4. $S = \left\{\frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}\right\}$

5. $S = \{60^{\circ},\ 180^{\circ},\ 300^{\circ}\}$

6. $S = \{0,\ \pi,\ 2\pi\}$

7. $\frac{7\pi}{2}$

8. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = -\frac{(2k+1)}{3}\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

   b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

9. $\emptyset$

10. a) $S = \left\{-\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}\right\}$

    b) $\frac{\pi}{6}$

Aula 25 – Funções Circulares Inversas

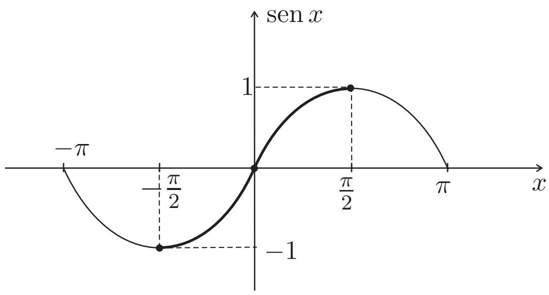
Função Arco-Seno

A função seno, isto é, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \operatorname{sen} x$ não é sobrejetora, pois não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen} x = 2$, ou seja $f(x) = 2$.

A função seno não é injetora, pois $\frac{\pi}{4} \neq \frac{3\pi}{4}$ e $\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4}$, ou seja, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ e $\frac{\pi}{4} \neq \frac{3\pi}{4}$.

Para acharmos a função inversa da função seno, esta deve ser bijetora.

Consideremos então a função seno restrita ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ e com contradomínio $[-1,\ 1]$, ou seja, $g : \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,\ 1]$ tal que $g(x) = \operatorname{sen} x$.



Note que :

(1) g é sobrejetora, já que $\forall y,\ y \in [-1,\ 1]$, existe $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $\operatorname{sen} x = y$

(2) g é injetora, já que no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \operatorname{sen} x_1 \neq \operatorname{sen} x_2$.

Logo de (1) e (2) g é bijetora, daí g admite inversa que vamos denotar por g^{-1} e vamos denominar de arco-seno.

g^{-1} tem domínio $[-1, 1]$, contradomínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e associa a cada $x \in [-1, 1]$, $\exists y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $y = \operatorname{arcsen} x$.

Portanto $y = \operatorname{arcsen} x \Leftrightarrow \operatorname{sen} y = x$ e $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

Gráfico da função arco-seno

Temos que os gráficos de duas funções inversas entre si são simétricas em relação à reta que contém as bissetrizes do 1º e 3º quadrantes.

Gráfico de $g(x) = \operatorname{sen} x$

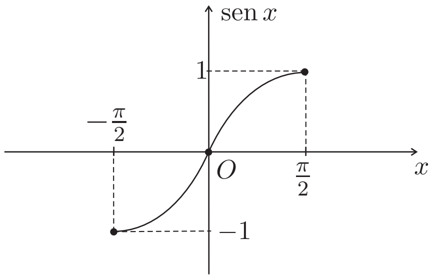
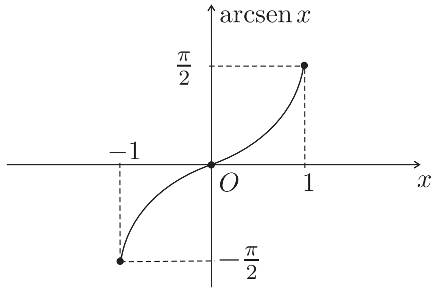


Gráfico de $g^{-1}(x) = \operatorname{arcsen} x$



Exercícios Resolvidos

1. Calcular α tal que $\alpha = \operatorname{arcsen} \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   Solução

   Temos $\alpha = \operatorname{arcsen} \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $-\dfrac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{3}$

2. Calcular $\cos\left(\operatorname{arcsen} \dfrac{1}{4}\right)$

   Solução

   Fazendo $\operatorname{arcsen} \dfrac{1}{4} = \alpha \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \dfrac{1}{4}$ e $-\dfrac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$

   Daí $\cos \alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{16}} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

3. Calcular $\cos\left(\operatorname{arcsen} \dfrac{2}{5} + \operatorname{arcsen} \dfrac{12}{13}\right)$

   Solução

   Considere $\operatorname{arcsen} \dfrac{2}{5} = \alpha \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \dfrac{2}{5}$ e $-\dfrac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$

   $\Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\dfrac{2}{5}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$

   Considere $\operatorname{arcsen} \dfrac{12}{13} = \beta \Rightarrow \operatorname{sen} \beta = \dfrac{12}{13}$ e $-\dfrac{\pi}{2} \leq \beta \leq \dfrac{\pi}{2}$ então $\cos \beta = \sqrt{1 - \dfrac{144}{169}} = \dfrac{5}{13}$

   Temos que $\cos\left(\operatorname{arcsen} \dfrac{2}{5} + \operatorname{arcsen} \dfrac{12}{13}\right) = \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \dfrac{\sqrt{21}}{5} \cdot \dfrac{5}{13} - \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{12}{13} = \dfrac{\sqrt{21}}{13} - \dfrac{24}{65} = \dfrac{5\sqrt{21} - 24}{65}$

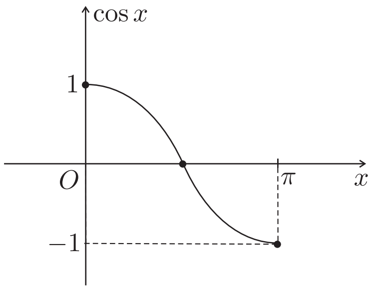
Função arco-cosseno

A função cosseno, isto é, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \cos x$ não é sobrejetora, pois não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x = 4$, ou seja, $f(x) = 4$.

A função cosseno não é injetora, pois $\frac{\pi}{3} \neq \frac{5\pi}{3}$ e $\cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3}$, ou seja, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ e $\frac{\pi}{3} \neq \frac{5\pi}{3}$.

Para acharmos a função inversa da função cosseno, esta deve ser bijetora.

Consideremos então a função cosseno restrita ao intervalo $[0, \pi]$ e com contradomínio $[-1, 1]$, ou seja, $g : [0, \pi] \to [-1, 1]$ tal que $g(x) = \cos x$.



Note que:

(1) g é sobrejetora, já que $\forall y,\ y \in [-1, 1]$, existe $x \in [0, \pi]$ tal que $\cos x = y$.

(2) g é injetora, já que no intervalo $[0, \pi]$ se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \cos x_1 \neq \cos x_2$.

Logo de (1) e (2) temos que g é bijetora, daí g admite inversa que vamos denotar por g^{-1} e vamos denominar de arco-cosseno.

g^{-1} tem domínio $[-1, 1]$, contradomínio $[0, \pi]$ e associa a cada $x \in [-1, 1]$, $\exists y \in [0, \pi]$ tal que $y = \arccos x$.

Portanto $y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x$ e $0 \leq\ y \leq \pi$

Gráfico da função arco-cosseno

Temos que os gráficos de duas funções inversas entre si são simétricas em relação à reta que contém as bissetrizes do 1º e 3º quadrantes.

Gráfico de $g(x) = \cos x$

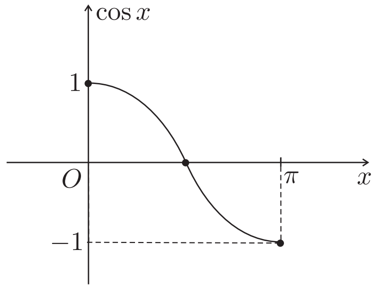
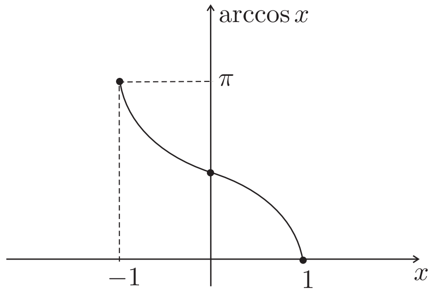


Gráfico de $g^{-1}(x) = \arccos x$



Exercícios Resolvidos

1. Calcular α tal que $\alpha = \arccos \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   Solução

   Temos que $\alpha = \arccos \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $0 \le \alpha \le \pi$ então $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

2. Calcular $\operatorname{tg}\left(\arccos \dfrac{3}{4}\right)$.

   Solução

   Fazendo $\arccos \dfrac{3}{4} = \alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{3}{4}$ e $0 \le \alpha \le \pi$.

   Daí $\operatorname{sen}\alpha = +\sqrt{1 - \dfrac{9}{16}} = +\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

   $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

   Logo $\operatorname{tg}\left(\arccos \dfrac{3}{4}\right) = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$

3. Calcular $\cos\left(\operatorname{arcsen} \dfrac{7}{25} - \arccos \dfrac{12}{13}\right)$

   Solução

   Considere $\operatorname{arcsen} \dfrac{7}{25} = \alpha \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{7}{25}$ e $-\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$.

   Considere $\arccos \dfrac{12}{13} = \beta \Rightarrow \cos\beta = \dfrac{12}{13}$ e $0 \le \beta \le \pi$.

   Temos que $\cos\alpha = +\sqrt{1 - \dfrac{49}{625}} = +\dfrac{24}{25}$ e $\operatorname{sen}\beta = \sqrt{1 - \dfrac{144}{169}} = \dfrac{5}{13}$

   Daí $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \dfrac{24}{25}\cdot\dfrac{12}{13} + \dfrac{7}{25}\cdot\dfrac{5}{13} = \dfrac{323}{325}$

   Logo $\cos\left(\operatorname{arcsen} \dfrac{7}{25} - \arccos \dfrac{12}{13}\right) = \dfrac{323}{325}$

Função arco-tangente

A função tangente, isto é, $f : \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \operatorname{tg} x$ é sobrejetora, pois $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}$ e $x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\operatorname{tg} x = y$.

A função f não é injetora, pois $0 \neq \pi$ e $\operatorname{tg} 0 = \operatorname{tg}\pi$.

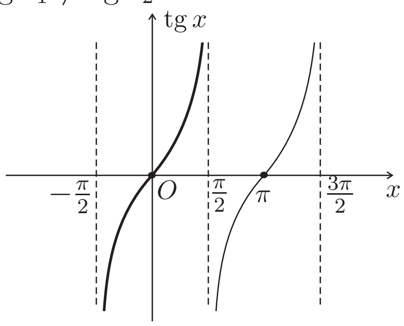
Para acharmos a função inversa da função tangente, esta deve ser bijetora.

Consideremos então a função tangente restrita ao intervalo $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ e com contradomínio $\mathbb{R}$, isto é, $g : \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \operatorname{tg} x$.

Note que:

(1) g é sobrejetora

(2) g é injetora, pois no intervalo $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, a função tangente se $x_1,\ x_2 \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \operatorname{tg} x_1 \neq \operatorname{tg} x_2$.



Logo de (1) e (2) g é bijetora, daí g admite inversa que vamos denotar por g^{-1} e vamos denominar de arco-tangente.

g^{-1} tem domínio $\mathbb{R}$, contradomínio $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ e associa a cada $x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tal que $y = \operatorname{arctg} x$.

Portanto $y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = x$ e $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$

Gráfico da função arco-tangente

Temos que os gráficos de duas funções inversas entre si são simétricas em relação à reta que contém as bissetrizes do 1º e 3º qaudrantes.

Gráfico de $g(x) = \operatorname{tg} x$

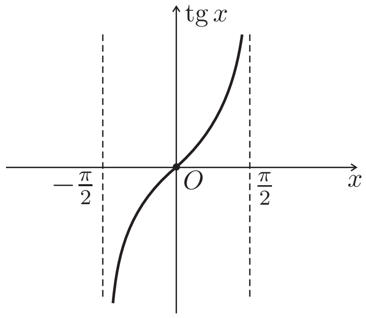
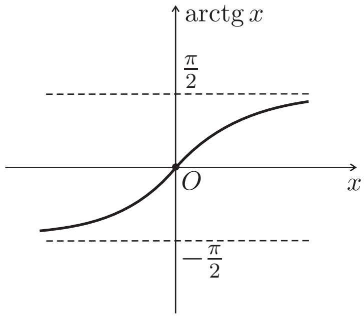


Gráfico de $g^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$



Exercícios Resolvidos

1. Determine α tal que $\alpha = \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

   Solução

   Temos que $\alpha = \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

   Então $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$

2. Calcular $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsen}\dfrac{4}{5} - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{4}\right)$

   Solução

   Fazendo $\operatorname{arcsen}\dfrac{4}{5} = \alpha \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{4}{5}$ e $-\dfrac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$.

   Então $\cos\alpha = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = \sqrt{1-\dfrac{16}{25}} = \dfrac{3}{5}$ e $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{4}{3}$

   Fazendo $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4} = \beta \Rightarrow \operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{4}$ e $\beta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

   Temos que $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsen}\dfrac{4}{5} - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{4}\right) = \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \dfrac{\frac{4}{3}-\frac{1}{4}}{1+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4}} = \dfrac{13}{16}$

3. Provar a igualdade $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$

   Solução

   Consideremos $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2},\ \beta = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$

   Então $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2},\ \alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

   $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{3},\ \beta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

   Temos que $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{3+2}{6}}{1-\frac{1}{6}} = \dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{6}{5} = 1$

   Logo $\alpha+\beta = \dfrac{\pi}{4}$

   Então, $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$

Exercícios Propostos

1. Determinar y tal que $y = \operatorname{arcsen}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

2. Calcular $y = \operatorname{sen}\left[\operatorname{arcsen}\dfrac{1}{2} + \operatorname{arcsen}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$

3. Encontre a solução da equação $\operatorname{arcsen} x = 2\operatorname{arcsen}\dfrac{1}{2}$

4. Resolver a equação: $\operatorname{arcsen} x = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}x\right)$

5. Determine o valor de $\operatorname{arcsen}\left(\cos\dfrac{33\pi}{5}\right)$

6. Calcular $\cos\left(3 \cdot \text{arcsen}\, \dfrac{12}{13}\right)$

7. Calcular $\cos\left(\dfrac{1}{2} \cdot \arccos \dfrac{7}{25}\right)$

8. Calcular $\text{tg}\left(2 \cdot \text{arctg}\, \dfrac{1}{5}\right)$

9. Detemine o número de soluções da equação $\text{arcsen}\, \sqrt{x} + \arccos \sqrt{x} = \dfrac{\pi}{2}$

10. Calcular $y = \text{tg}[\text{arcsen}(-0,6)]$

Gabarito

1. $-\dfrac{\pi}{6}$
2. $y = 1$
3. $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
4. $x = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
5. $-\dfrac{\pi}{10}$
6. $-\dfrac{2035}{2197}$
7. $\dfrac{4}{5}$
8. $\dfrac{5}{12}$
9. infinitas soluções
10. $-\dfrac{3}{4}$